



HAL
open science

Plan•|•Opti•|•Chrono

Nicolas Boizot

► **To cite this version:**

Nicolas Boizot. Plan•|•Opti•|•Chrono. Mathématiques [math]. Université de Toulon (UTLN), FRA., 2021. tel-04888981

HAL Id: tel-04888981

<https://univ-tln.hal.science/tel-04888981v1>

Submitted on 15 Jan 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International License

Plan · | · Opti · | · Chrono

Auteur :

Nicolas BOIZOT

Jury :

M. HASSAN HAMMOURI, Professeur, Université Claude Bernard, Lyon 1, Rapporteur.
M. FRÉDÉRIC JEAN, Professeur, ENSTA ParisTech, Rapporteur.
MME SOPHIE TARBOURIECH, Directeur de Recherche CNRS, LAAS CNRS, Rapporteur.

M GILDAS BESANÇON, Professeur, INP Grenoble, Examineur.
M. FRANCESCO ROSSI, Professeur, Università di Padova, Examineur

M. JEAN-PAUL GAUTHIER, Professeur émérite, Université de Toulon, Garant.

Mémoire présenté en vue de l'obtention de
l'**H**abilitation à **D**iriger des **R**echerches

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Automatique

Ecole Doctorale 548 - Mer et Sciences

02 juin 2021

Musical score for three staves in 3/4 time, key of B-flat major. The first staff contains measures 1-6. The second staff, starting at measure 7, contains measures 7-13. The third staff, starting at measure 14, contains measures 14-20. The piece concludes with a double bar line at the end of the third staff.

à Amandine



Remerciements

Je tiens tout d’abord à remercier Hassan Hammouri, Frédéric Jean et Sophie Tarbouriech, qui ont endossé le rôle de rapporteur, pris le temps de lire ce mémoire et accepté d’être membre du jury.

J’adresse également tous mes remerciements aux autres membres du jury : Gildas Besançon, qui enfile le costume de président, Francesco Rossi, et *last but not least*, Jean-Paul Gauthier qui m’a accueilli au sein de son équipe, à Toulon. Je lui suis reconnaissant pour ses conseils¹, malgré mon penchant naturel à ne pas les suivre.

Je voudrais remercier l’équipe *ESCODI sud* qui m’a accueilli au LSIS avec beaucoup de bienveillance. Merci à vous, Jean, Jean-François, Frédéric et Nathalie — sans oublier Alain et Thibault qui commençaient leur thèse tandis que je commençais mon post-doctorat. Je pense aussi aux membres du LIS, rencontrés avant ou après *la Grande Réunion* : Adoracion, Elisabeth, Vincente, Adeline, Sébastien, Ricard, Nadège, ainsi qu’aux nombreux autres que j’oublie. J’ai une pensée spéciale pour Eric, bien sûr, mais surtout pour Francesca et nos débus conjoints (ou adjoints, je m’y perds un peu...).

J’adresse mes très amicales salutations à Ouazna, et Aïda.

Pour finir, je remercie ma famille, mes amis, les curieux ou les pressants qui m’ont un jour ou l’autre demandé “*et alors cette HDR?*”, ou l’une de ses variantes.

1. Aux rangs desquels on retrouvera, bien sûr, l’enseignement fondamental énoncé par Francesca [Chi18].

UNIVERSITÉ DE TOULON

Résumé

Ecole Doctorale 548 - Mer et Sciences

LIS, Laboratoire d'Informatique et Systèmes

Habilitation à Diriger des Recherches

Plan · | · Opti · | · Chrono

Nicolas BOIZOT

J'ai réalisé ma thèse de doctorat entre 2006 et 2010. J'occupais alors un poste *d'assistant* à l'Université du Luxembourg, dans l'équipe du professeur Jürgen Sachau. Intitulée *Adaptive high-gain extended Kalman filter and applications*, cette thèse est le fruit d'une collaboration entre les universités du Luxembourg et de Bourgogne, et co-dirigée par les professeurs Jürgen Sachau et Eric Busvelle.

Ce mémoire est pour moi l'occasion de présenter les travaux de recherche les plus significatifs que j'ai menés à l'université de Toulon. D'abord en tant que chercheur postdoctoral du projet SHARE², membre de l'équipe du professeur Jean-Paul Gauthier. Puis comme *maître de conférence* affilié à la section 61, suite à mon recrutement en septembre 2011. Je fais partie des effectifs du LIS, le Laboratoire d'Informatique et Systèmes (anciennement Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes), et suis rattaché à l'équipe enseignante du département Génie Electronique et Informatique Industrielle de l'IUT de Toulon-La Garde.

Trois contributions sont présentées dans la suite de ce document. Les deux premières sont des travaux relevant du domaine de la planification de trajectoires. Il s'agit de cas d'études dont le traitement s'appuie sur le principe du maximum de Pontryagin. Le premier travail est une formalisation *ad hoc* d'un *problème de minimisation de la consommation énergétique d'un mobile*, tandis que le second, un *problème de planification de trajectoire pour les systèmes non-holonomes* s'inscrit dans une théorie développée à travers une série d'articles publiés sur plusieurs années. Comme on pourra le voir dans la bibliographie, l'ordre chronologique n'est pas respecté dans la présentation. L'objectif ici est d'apporter une certaine cohérence dans la manière dont le principe du maximum est décrit et abordé. Enfin, la troisième contribution porte sur la problématique des *observateurs pour les systèmes à mesures asynchrones*.

Le travail présenté dans le premier chapitre a été réalisé en collaboration avec le professeur Jean-Paul Gauthier et Mme Ouazna Oukacha dans le cadre de sa thèse de doctorat³ [Ouk17]. Cette thèse de l'université de Toulon a vu le jour à la suite d'un partenariat Hubert Curien, programme Tassili⁴. Il s'agit de l'étude *partielle* d'un problème de contrôle optimal présentant une fonction de coût non-différentiable en certaines valeurs du contrôle ou de l'état. Le problème en question est assez librement inspiré par les problématiques de minimisation de la consommation énergétique d'une voiture lors d'un déplacement sur une route dont le profil est connu, et cherche à exploiter certaines idées concernant la minimisation du travail absolu d'un système mécanique actionné, en particulier, les inactivations du contrôle. Cette partie reprend les travaux [Ouk+14; OB20; OB17].

2. Projet porté par un consortium d'entreprises et financé par le *Fond Unique Interministériel*.

3. Direction : J-P Gauthier. Co-encadrement : N. Boizot. Soutenue le 17 novembre 2017

4. Programme de l'Agence Campus France en partenariat avec le Pr. Mohamed Aidène de l'université de Tizi-Ouzou (2015-2018).

Le second chapitre aborde une contribution à la *théorie de l'interpolation par l'entropie sous-riemannienne* développée à travers la série d'articles [[GFPRM04](#); [GZ05a](#); [GZ05b](#); [GZ05c](#); [GZ06](#); [GZ07](#); [GZ10](#); [GMP15](#); [BG13a](#); [BG13b](#)] et dont le professeur Jean-Paul Gauthier est l'investigateur principal. Le cadre est celui des systèmes cinématiques à deux contrôles présentant une certaine régularité, et le système académique abordé, la *boule roulant sur un plan et tirant une remorque*. Il s'agit d'un système cinématique de co-dimension 4 qui constitue un cas particulier au sein de la classe des systèmes cinématiques de cette co-dimension. Cette partie reprend les éléments présentés dans les articles [[BG13a](#); [BG13b](#)].

Le dernier chapitre concerne la synthèse d'observateurs pour les systèmes non-linéaires asynchrones⁵. Le terme *asynchrone* est utilisé ici pour désigner des systèmes de contrôle à plusieurs sorties et dont les différentes composantes du vecteur de sortie ne sont pas systématiquement disponibles aux mêmes instants. Ce travail a été réalisé en collaboration avec les professeurs Eric Busvelle et Vincent Hugel (Laboratoire COSMER, université de Toulon) ainsi que Mme Aïda Feddaoui Papin dans le cadre de sa thèse de doctorat⁶ [[FP20](#)]. Cette partie reprend partiellement les travaux [[Fed+17](#); [Fed+20](#); [FP+19](#)].

5. Dans la littérature, on trouvera aussi la dénomination *multi-rate systems*.

6. Co-direction : E. Busvelle & V. Hugel. Co-encadrement : N. Boizot. Soutenue le 18 mai 2020.

Table des matières

Résumé	vii
1 Consommation Optimale	1
1.1 Mise en forme du problème	2
1.2 De la régularité	5
1.3 Présentation des cas d'étude et résultats préliminaires	6
1.4 Étude de cas	9
1.4.1 Route plate sans frottement	9
1.4.2 Route plate avec frottement	10
1.4.3 Un profil de route non-plate	16
2 Planification de trajectoire pour les systèmes non-holonomes	25
2.1 La boule roulant sur un plan et tirant une remorque	26
2.2 Synthèse optimale	29
2.3 Conclusion	33
3 Observateurs Asynchrones	35
3.1 Notations	36
3.2 Vers une forme normale asynchrone	37
3.3 Un filtre de Kalman étendu grand-gain pour les systèmes à mesures asynchrones	40
3.4 Discussion	42
3.5 Exemple illustratif	44
4 Epilogue	47
Bibliographie	49

Table des figures

1.1	Consommation optimale : modélisation	2
1.2	Exemples de fonctions de rendement.	3
1.3	Illustration de la condition de maximisation	8
1.4	Trajectoire optimale pour le système <i>double intégrateur</i>	10
1.5	Second cas, rendement constant	12
1.6	Second cas, rendement non-constant : $T_f < T_{lim}$	13
1.7	Second cas, rendement non-constant : $T_{lim} < T_f$	14
1.8	Second cas, rendement non-constant : $T_{lim} < T_f$ (deux étapes d'activation $u = -1$)	15
1.9	Troisième cas : profil de la route	16
1.10	Troisième cas : $T_f^{1,s,0}$ existe et $T_f > T_f^{1,s,0}$	18
1.11	Troisième cas : extrémales en temps petit	19
1.12	Troisième cas : deux étapes d'activation $u = -1$	21
1.13	Troisième cas : extrémale avec arc arrière (minimisante)	22
1.14	Troisième cas : extrémale avec arc arrière (non-minimisante)	23
2.1	Système de la boule roulant sur un plan, tirant une remorque.	26
2.2	Graphe de la quartique h_q	31
2.3	Trajectoire $\bar{\Lambda}$ de type II.	31
2.4	Formes de Λ pour $\bar{\Lambda}$ de type II	32
2.5	Projection de la solution pour $n=2$ dans le plan (x_1, x_2) .	33
2.6	Projection de la solution pour $n=5$ dans le plan (x_1, x_2) .	33
2.7	Problème du parking adapté au système de la <i>boule tirant une remorque</i>	33
3.1	Représentation des subdivisions $\{t_k\}$ et $\{s_k^{(i)}\}$	39
3.2	Localisation d'un robot mobile à l'aide de deux balises	44
3.3	Trajectoire du robot et instants de mesure.	45
3.4	Reconstruction de la trajectoire.	45

Chapitre 1

Minimisation de consommation énergétique : un problème de contrôle optimal non-lisse

Ce premier chapitre est consacré à la présentation de l'étude *partielle* d'un problème de contrôle optimal présentant une fonction de coût non-différentiable en certaines valeurs du contrôle ou de l'état. Le plus connu des problèmes de ce type est celui de la minimisation de la norme L^1 du contrôle, c'est-à-dire :

$$\int_0^{T_f} |u(t)| dt \rightarrow \min$$

La conséquence la plus notable de ce type de contrainte — cf. [AS15; BGP08; Che16; CCC16; MP14; Ros06; VM06] — est que la stratégie optimale correspondante peut présenter une ou plusieurs *phases d'inactivation*. Une inactivation étant entendue comme un intervalle de temps non-trivial le long duquel le contrôle est nul. Ce type de comportement paraît très intéressant pour les problèmes de minimisation énergétique dans le sens où les inactivations jouent le rôle d'un processus de sélection des plages de temps où le contrôle est le plus efficace, voir par exemple [CCC16; VM06].

Le problème présenté ci-après est assez librement inspiré du problème de minimisation de la consommation énergétique d'une voiture lors d'un déplacement sur une route dont le profil est connu. Pour les besoins de ce manuscrit, nous l'avons reformulé en considérant un mobile quelconque. Le coût attaché à ce problème exploite la remarque précédente concernant les inactivations ainsi que les idées concernant la minimisation du travail absolu d'un système mécanique actionné¹ que l'on retrouve dans les articles [Ber+08; BGP08].

L'analyse de ce problème est complétée par un théorème de régularité permettant d'exclure les phénomènes de chattering dans certaines conditions spécifiques. Finalement, l'étude proposée est considérée comme *partielle* car seuls trois cas d'étude sont abordés. L'analyse de ces trois cas laisse apparaître une riche zoologie de stratégies optimales : arcs bang-bang, inactivations, arcs singuliers qui ne peuvent pas être calculés par dérivées successives de la fonction de commutation — e.g. [BJ75; FA89] — et arcs avec *retour en arrière*.

1. Si, par exemple, $x(t)$ désigne un déplacement et $u(t)$ une force externe générant ce déplacement, alors le travail absolu de u est :

$$\int_0^{T_f} |\dot{x}(t)u(t)| dt$$

1.1 Mise en forme du problème

Modèle dynamique

Soit un mobile se déplaçant sur une *route* représentée dans un plan position-hauteur (ξ, h) , comme cela est schématisé dans la figure 1.1. L'orientation du mobile est donnée par un angle θ , qui correspond aussi à l'orientation de la route à la position considérée. Un modèle dynamique très simplifié est établi à travers le bilan des quatre forces suivantes où le glissement des roues est négligé :

- la gravité \mathbf{G} , dont la norme est donnée par le produit de la masse du mobile m avec la constante universelle g ;
- la réaction de la route \mathbf{R} , de norme $mg \cos(\theta)$;
- la force propulsive \mathbf{F} , dont la norme n'est autre que la variable de contrôle $u(t)$;
- une force de frottement \mathbf{f} , opposée au mouvement dont la norme est supposée proportionnelle à la vitesse du mobile : $\|\mathbf{f}\| = \alpha \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{h}^2}$ pour un coefficient de frottement $\alpha \geq 0$.

Le profil de la route est quant-à-lui modélisé par une fonction au moins \mathcal{C}^1 , notée $h = \varphi(\xi)$. Le problème n'a donc qu'un degré de liberté. L'angle θ appartient à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et est uniquement déterminé par la relation $\theta(\xi) = \arctan(\varphi'(\xi))$, où φ' désigne la dérivée par rapport à ξ .

Il résulte de cette représentation une dynamique relativement compliquée que l'on peut écrire beaucoup plus lisiblement si l'on considère l'abscisse curviligne en lieu et place de ξ . Dans ce chapitre, x sera cette abscisse curviligne, sa dérivée temporelle sera notée $y = \dot{x}$, et le profil de la route sera modélisé par une fonction au moins \mathcal{C}^1 , $\theta(x)$. En effet, il sera plus aisé d'utiliser cette fonction, puis de reconstruire le profil de la route que l'inverse [Ouk17]. Le modèle prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ m\dot{y} = u - \alpha y - mg \sin(\theta(x)) \end{cases} \quad (1.1)$$

où x et y sont des fonctions absolument continues sur \mathbb{R} , $u(t) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$.

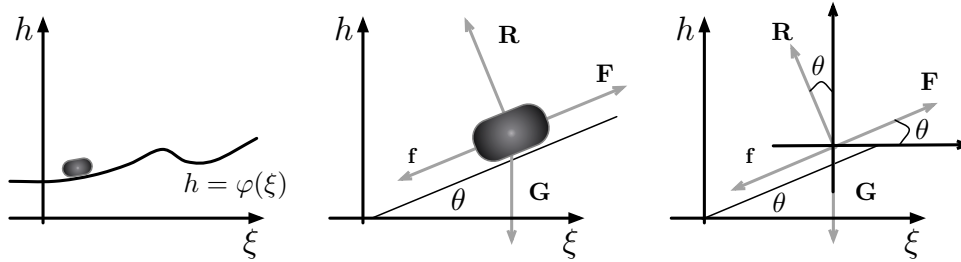


FIGURE 1.1 – Notations et éléments de modélisation.

Fonction de coût

Le coût associé au modèle (1.1) est l'énergie dépensée pour déplacer le mobile d'un point à un autre. Si le débit d'énergie est noté $D(t)$, alors ce coût s'exprime par l'intégrale

$$J = \int_0^{T_f} D(\tau) d\tau$$

Soient $A(t)$ le travail absolu de la force de propulsion [Ber+08] et $\frac{dA(t)}{dt}$ la puissance instantanée absolue qui lui est associée. Cette dernière est reliée au débit d'énergie à l'aide d'une fonction de rendement ρ par la relation suivante :

$$\frac{dA(t)}{dt} = |yu| = D(t)\rho(\cdot) \quad \Rightarrow \quad J(u) = \int_0^{T_f} \frac{|yu|}{\rho(y)} d\tau$$

La fonction de rendement, dont des exemples sont représentés graphiquement en figure 1.2, admet les caractéristiques suivantes :

- il s'agit d'une fonction de la vitesse du mobile : $\rho(y)$;
- elle est à valeurs dans l'intervalle $]0, 1]$, pour tout $y \in \mathbb{R}$;
- seuls les deux comportements suivants sont pris en compte :
 1. $\rho(y)$ est identiquement constante, disons $\rho(y) = 1$ car la valeur de la constante n'a pas d'impact sur la solution;
 2. sur \mathbb{R}^+ , $\rho(y)$ admet un seul maximum (y^+), est croissante sur $]0, y^+[$ et décroissante sur $]y^+, +\infty[$;
(sur \mathbb{R}^- , $\rho(y)$ admet un seul maximum (y^-), $\rho(y)$ est décroissante sur $]y^-, 0[$ et croissante sur $] -\infty, y^- [$)
- elle est dérivable autant de fois que nécessaire.

Il faut toutefois noter que $\rho(y)$ n'est pas nécessairement une fonction paire. Son comportement peut ne pas être identique sur \mathbb{R}^+ et \mathbb{R}^- .

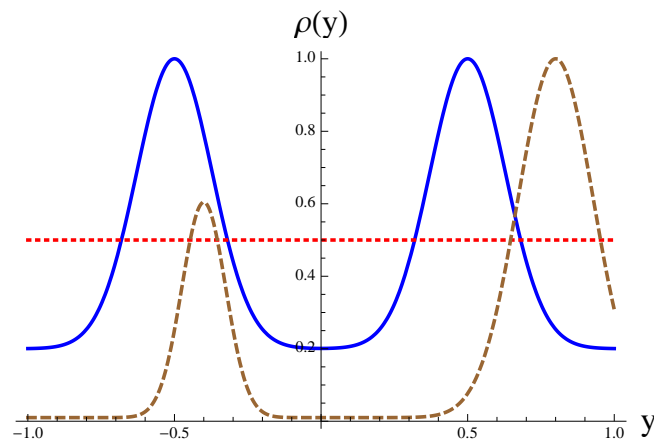


FIGURE 1.2 – Exemples de fonctions de rendement.

Un problème de contrôle optimal en temps fixe

Dans la suite, nous nous intéressons à des trajectoires partant de l'origine et dont la destination est $x(T_f) \in \mathbb{R}^{+*}$ à vitesse nulle — T_f désigne le temps de parcours, ou temps final, et les paramètres m et g sont fixés à 1. Le problème de contrôle optimal se présente alors comme suit.

$$(\mathcal{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad J(u) = \int_0^{T_f} \frac{|yu|}{\rho(y)} d\tau \\ \text{Sous les} \\ \text{contraintes} \quad (\Sigma_1) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u - \alpha y - \sin(\theta(x)) \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X(T_f) = \begin{pmatrix} x(T_f) \\ y(T_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_f > 0 \\ \\ |u(t)| \leq 1 \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ T_f > 0 \text{ fixé.} \end{array} \right.$$

En suivant les arguments de [LM67, Thm. 4, P. 259], mais aussi des travaux [Ber+08; BGP08], l'existence de solutions est garantie dès lors que T_f est choisi plus grand ou égal à la solution du problème en temps minimal associé à (\mathcal{P}_1) .

Discussion

Les choix de modélisation qui ont été fait ci-dessus ont, bien sûr, un impact déterminant sur les stratégies optimales que l'on va voir émerger lors de la résolution. Diverses pistes n'ont pas été retenues ou explorées, en voici quelques-unes.

Tout d'abord, nous avons choisi de restreindre le modèle à la dynamique longitudinale du mobile, ce qui semble raisonnable si ce dernier est assujéti à la route. Cependant, si l'on considère que ce mobile est un véhicule de type voiture, alors la dynamique latérale pourrait elle aussi être prise en compte, séparément de la dynamique longitudinale ou unifiée dans un modèle global. On trouvera dans [Gil92] un traité portant sur la dynamique du véhicule, tandis que la thèse [Seb10] est un exemple de travail exploitant de manière unifiée dynamique latérale et longitudinale. L'intérêt du choix fait ici est bien sûr de simplifier l'analyse du problème tout en conservant l'information dynamique qui semble la plus significative.

Remarquons ensuite que l'ensemble de la partie mécanique a été évacuée du modèle et remplacée par la fonction de rendement qui apparaît dans la fonction coût. Les problématiques de changement de vitesse pour des véhicules de type voiture, susceptibles de faire apparaître des non-linéarités de type *hystérésis*, font par exemple partie des problèmes mécaniques qui ont été ainsi écartés. Si le système de propulsion est un moteur électrique, la question du *freinage régénératif* se pose. De même, dans le cas d'un véhicule directement piloté par un humain, est-il raisonnable d'inclure le freinage dans le coût ?

La fonction coût suppose que la consommation d'énergie est la même en phase de décélération ($u < 0$) qu'en phase d'accélération ($u > 0$). Il est possible d'imaginer un système de discrimination de ces cas, par exemple à l'aide d'une fonction $v(u)$ de la forme suivante :

$$v(u) = \begin{cases} \alpha u & \text{for } u \geq 0 \\ -\beta u & \text{for } u < 0 \end{cases} \quad \text{où } 0 < \beta \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad J(u) = \int_0^{T_f} \frac{|y| v(u)}{\rho(y)} d\tau$$

Le problème de contrôle optimal (\mathcal{P}_1) est énoncé en temps fixe, tandis que le cadre du temps libre semblerait plus adapté. Si T_f est laissé libre, il est possible de prouver que pour certains profils de route le minimum n'est pas atteint. Dans le but de convertir (\mathcal{P}_1) en un problème en temps libre, le temps de parcours pourrait-être pénalisé² dans la fonction coût. Alternativement, un profil de route spécifique pourrait-être envisagé. L'étude préliminaire [Ouk+14] propose une résolution du premier cas d'étude en temps fixe et en temps libre avec pénalisation du temps, lorsque le rendement est constant. Cette démarche n'a cependant pas été systématisée.

La fonction de rendement utilisée est telle que $\rho(0) \neq 0$ ce qui a pour conséquence que le terme $\frac{|yu|}{\rho(y)}$ est petit lorsque y est petit, mais aussi lorsque $\rho(y)$ est grand. Ces deux configurations vont se retrouver en concurrence lorsqu'il s'agira de déterminer la stratégie optimale : "*doit-on agir à rendement haut ou à vitesse basse?*". Une manière de reformuler le problème pour évacuer cette question serait de choisir une fonction de rendement telle que $\rho(0) = 0$ et vérifiant $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|}{\rho(y)} = cste$.

La résistance de l'air n'est pas prise en compte dans le modèle. En effet, seul un terme de frottement fluide, proportionnel à la vitesse, est considéré. Ceci implique que, si le profil de route n'y fait rien, le mobile ne peut pas s'arrêter en temps fini sans activation du contrôle. Cette particularité sera d'une grande aide lors de l'étude par le principe du maximum. La question de l'impact d'un terme proportionnel au carré de la vitesse vient alors à l'esprit.

2. La pertinence de cette alternative est renforcée par les études récentes portant sur la notion de *coût du temps*, voir par exemple [BJ16].

1.2 De la régularité

Régularité de la variable de contrôle

Soit un système de contrôle suivant, pour tout $t \in [0, T]$ où $T > 0$ est fixé :

$$(\Sigma_0) \quad \dot{x} = F(x) + uG(x)$$

L'état initial de (Σ_0) est $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n > 0$. Les champs de vecteurs $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ sont supposés réels analytiques. La variable de contrôle répond à la contrainte $|u(t)| \leq 1$.

Théorème 1. Soit \mathcal{PA} le sous ensemble de $L^1_{[0,T]}$ composé des contrôles presque partout algébriques par morceaux — sur un nombre fini de sous-intervalles de $[0, T]$. On se donne un problème de contrôle optimal de la forme :

$$(\mathcal{P}_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad J(u) = \int_0^{T_f} |\psi(x(\tau))u(\tau)| d\tau \\ \text{Sous les} \\ \text{contraintes} \quad (\Sigma_0) \quad \dot{x}(t) = F(x(t)) + uG(x(t)) \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ x(0) = x_0 \text{ et } x(T_f) = x_f \\ \\ |u(t)| \leq 1 \quad \text{pour } t \in [0, T_f] \\ \\ T_f > 0 \text{ fixé} \end{array} \right.$$

sous les hypothèses :

- (\mathcal{H}_0) $\psi(\cdot)$ possède un maximum sur \mathbb{R}^n ;
- (\mathcal{H}_1) $J(\cdot)$ possède un minimum sur \mathcal{PA} , noté J_M ;
- (\mathcal{H}_2) les trajectoires temps minimal de (Σ_0) sont données par des contrôles appartenant à \mathcal{PA} ;
- (\mathcal{H}_3) (Σ_0) est localement contrôlable en temps petit³ en x_f ;
- (\mathcal{H}_4) (x_f, u_f) est un point d'équilibre de (Σ_0) tel que $\psi(x_f)u_f \equiv 0$.

Alors J_M est le minimum de $J(\cdot)$ sur $L^1_{[0,T_f]}$.

Le théorème reste vrai lorsque x_f est remplacé par x_0 dans les hypothèses (\mathcal{H}_3) et (\mathcal{H}_4).

Démonstration. La preuve complète de ce théorème se trouve dans l'article [OB20] ainsi que dans le manuscrit de thèse [Ouk17]. L'idée consiste à montrer que sous de bonnes hypothèses (même fortes), la classe des contrôles qui solutionnent le problème temps minimal absorbe, d'une certaine manière, la classe des contrôles solution du problème (\mathcal{P}_0) . \square

Remarque 1. La preuve repose sur plusieurs points clefs parmi lesquels l'auto-accessibilité en temps petit du système (Σ_0) , que l'on attrape à partir de la contrôlabilité locale en temps petit et l'analyticité des champs de vecteur $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ d'après un résultat de l'article [Gra92].

En particulier, le corollaire 4.15 de [Gra92] propose plusieurs hypothèses permettant d'obtenir l'auto-accessibilité en temps petit. Ainsi, la propriété "F(.) et G(.) sont des champs de vecteurs réels analytiques" peut-être remplacée par "F(.) et G(.) sont \mathcal{C}^1 et localement bornés".

Trajectoires sans retour en arrière

L'expression **arc arrière** ou **arc avec retour en arrière** désigne un morceau de trajectoire, défini sur un intervalle de temps non-trivial, le long duquel $y < 0$.

Si l'on se place dans la situation où les trajectoires sont composées d'un nombre fini d'arcs (i.e. engendrée par un contrôle de \mathcal{PA}), alors, certains profils de route entraînent le corolaire suivant.

3. Une système de contrôle (Σ_0) est **localement contrôlable en temps petit** en x_0 , si pour tout $T > 0$ l'ensemble atteignable par des contrôles admissibles en temps inférieur T contient un voisinage ouvert de x_0 — cf. [Gra92].

Corolaire 1. *Considérons un profil de route tel que le problème de contrôle optimal (\mathcal{P}_1) est invariant par translation le long de l'axe- x du diagramme de phase de (Σ_1). Alors, les trajectoires comprenant des arcs arrières ne sont pas candidates à l'optimalité.*

1.3 Présentation des cas d'étude et résultats préliminaires

Trois cas d'études sont présentés dans ce mémoire. Ils correspondent aux différentes configurations du problème (\mathcal{P}_1) qui ont été investiguées jusqu'ici, et rapportées dans l'article [OB20] :

1. route plate sans frottement ;
2. route plate avec présence de frottement ;
3. un profil particulier de route non-plate et sans frottement⁴.

Dans les deux premiers cas, le système de contrôle (Σ_1) est linéaire, il est non-linéaire dans le dernier. Le problème de contrôle optimal abordé étant en temps final T_f fixé, il est par conséquent nécessaire que ce dernier soit plus grand que le temps minimal nécessaire pour atteindre la configuration visée, noté T_{min} .

Dans les trois cas présentés ci-dessus, la stratégie en temps minimal est *bang-bang* avec une seule commutation et le calcul de T_{min} est plutôt immédiat.

$$u_{min}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < \Delta t \\ -1 & \text{pour } \Delta t \leq T_{min} \end{cases}$$

Le cas (1) est un exemple plutôt élémentaire traité dans le premier chapitre du livre de référence [Pon+62]. Les stratégies des cas (2) et (3) sont elles aussi assez facilement déduites en suivant la procédure que l'on retrouve dans [Pon+62]. Les formules du temps minimal pour les cas (1) et (2) sont respectivement :

$$T_{min} = 2\sqrt{x_f} \quad \text{et} \quad T_{min} = \frac{1}{\alpha} \left(\ln \left(1 + \sqrt{1 - e^{-\alpha^2 x_f}} \right) - \ln \left(1 - \sqrt{1 - e^{-\alpha^2 x_f}} \right) \right) \quad (1.2)$$

En ce qui concerne le dernier cas, étant donné que la formule du temps minimal n'a de sens qu'après avoir défini le profil de route utilisé, la formule sera donnée dans la section qui lui est dédiée.

L'étude s'appuie sur le principe du maximum de Pontryagin [Pon+62; AS04; Cla13; BP04]. Même si pour les cas d'études qui sont abordés ici, les problèmes induits par la non-dérivabilité du coût par rapport à la variable y seront évacués, la version du principe du maximum que l'on doit à F. Clarke [Cla13] nous sera tout de même nécessaire pour établir le type de contrôle qui sera candidat à l'optimalité avant que les simplifications soient faites.

L'ensemble du traitement présenté dans la suite a été réalisé d'une manière que l'on pourrait qualifier d'*artisanale* dans le sens où le lecteur n'y trouvera pas l'usage de logiciels dédiés à la résolution de problèmes de contrôle optimal par la méthode directe (i.e. Bocop [TC20]), ou indirecte (i.e. HamPath [CCG20]). De même les techniques de *régularisation* et *d'augmentation* — e.g. [VM06] — n'ont pas été utilisées. Pour finir, on pourra aussi regretter l'absence de l'emploi du formalisme du contrôle géométrique pour déterminer les extrémales singulières à l'aide de crochets de Poisson. Cette approche s'est, en fait, révélée peu efficace dans le but de caractériser les extrémales singulières de ce problème spécifique.

Dans la suite, $\mathcal{P}(t) = (p(t), q(t))^t$ désigne le vecteur adjoint de $X(t) = (x(t), y(t))^t$ et l'hamiltonien est de la forme suivante :

$$\mathcal{H}(X, \mathcal{P}, u, \lambda_0) = py + q(u - \alpha y - \sin(\theta(x))) - \lambda_0 \frac{|yu|}{\rho(y)} \quad \text{où} \quad \lambda_0 \in \{1, 0\}$$

⁴. Dont le principal intérêt est de pouvoir exhiber des trajectoires minimisantes présentant des retours en arrière.

(\mathcal{P}_1) étant un problème autonome, alors, $\mathcal{H}(X, \mathcal{P}, u, \lambda_0)$ est constant le long des trajectoires extrémales et la valeur correspondante sera notée H . De plus, toujours le long des trajectoires optimales, la condition de maximisation suivante est vérifiée pour presque tout t :

$$H = \max_{|u| \leq 1} \mathcal{H}(X, \mathcal{P}, u, \lambda_0)$$

Les équations adjointes sont :

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(X, \mathcal{P}, u, \lambda_0) \quad (1.3)$$

$$-\dot{q} \in D_y \mathcal{H}(X, \mathcal{P}, u, \lambda_0) \quad (1.4)$$

où $D_y \mathcal{H}$ est la sous-différentielle de \mathcal{H} par rapport à y , cf. [Cla13]. La première composante du vecteur adjoint, $p(t)$, est donc constante si le profil de la route l'est.

Un contrôle, ou une stratégie, $u(t)$ sera qualifié(e) **d'extrémal(e)** s'il existe un couple $\mathcal{P}(0) = (p_0, q_0)$ tel que la trajectoire du système hamiltonien constitué de (Σ_1), (1.3) et (1.4) est extrémale.

Conséquence de la condition de maximisation, la stratégie candidate à l'optimalité lorsque l'on considère de possibles **extrémales anormales** est :

$$u(t) = \operatorname{argmax}_{|u| \leq 1} \mathcal{H}(X, \mathcal{P}, u, 0) = \operatorname{sgn}(q)$$

Les extrémales anormales ne jouent aucun rôle particulier dans (\mathcal{P}_1). En effet, si $T_f = T_{min}$ alors la solution de (\mathcal{P}_1) est l'extrémale anormale — identique à la solution en temps minimal — tandis qu'il n'existe pas d'extrémale anormale dans le reste des cas.

En ce qui concerne les **extrémales normales**, la situation — illustrée en figure 1.3 — est :

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{argmax}_{|u| \leq 1} \mathcal{H}(X, \mathcal{P}, u, 1) \\ &= \operatorname{argmax}_{|u| \leq 1} \left(qu - \frac{|yu|}{\rho(y)} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } q > \frac{|y|}{\rho(y)} \\ u \in [0, 1] & \text{si } q = \frac{|y|}{\rho(y)} \\ 0 & \text{si } -\frac{|y|}{\rho(y)} < q < \frac{|y|}{\rho(y)} \\ u \in [-1, 0] & \text{si } q = -\frac{|y|}{\rho(y)} \\ -1 & \text{si } q < -\frac{|y|}{\rho(y)} \end{cases} \quad (1.5) \end{aligned}$$

Propriétés des arcs singulier

Un **arc singulier** est défini comme un morceau de trajectoire extrémale le long duquel $q = \frac{|y|}{\rho(y)}$ ou $q = -\frac{|y|}{\rho(y)}$ sur un intervalle de temps non-trivial — cf. par exemple [BP04; BC03; VM06].

Le long d'une extrémale singulière normale, l'hamiltonien peut-être ré-écrit de la manière suivante :

$$H = py - q(\sin(\theta(x)) + \alpha y) \quad \text{où} \quad q(t) = \begin{cases} \frac{|y(t)|}{\rho(y(t))} \\ -\frac{|y(t)|}{\rho(y(t))} \end{cases}$$

Par conséquent, si la trajectoire en vitesse (i.e. y) d'un arc singulier extrémal passe par 0, alors $H = 0$ le long de cette extrémale.

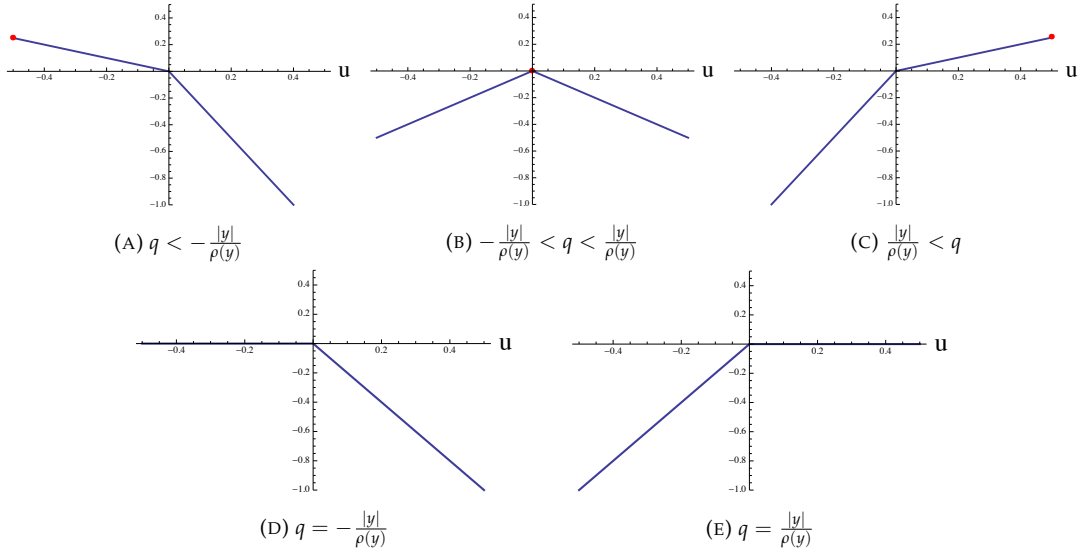


FIGURE 1.3 – Illustration de la condition de maximisation, dans le cas normal, à l'aide du tracé de la fonction $u \rightarrow qu - \frac{|y|}{\rho(y)}|u|$.

Si l'on se concentre sur la **configuration** $q = \frac{|y|}{\rho(y)}$ avec $y > 0$, alors $u \in [0, 1]$ et l'hamiltonien devient

$$\mathcal{H}(X, \mathcal{P}, u, \lambda_0) = py - \frac{y}{\rho(y)} (\sin(\theta(x)) + \alpha y) \quad (1.6)$$

La dérivée temporelle est alors :

$$0 = \dot{y} \left[p - \sin(\theta(x)) \left(\frac{1}{\rho(y)} - \frac{y\rho'(y)}{\rho^2(y)} \right) - \alpha y \left(\frac{2}{\rho(y)} - \frac{y\rho'(y)}{\rho^2(y)} \right) \right] \text{ où } \rho'(y) = \frac{\partial \rho(y)}{\partial y}$$

Puisque cette dernière expression est de la forme $0 = \dot{y} [p - \sin(\theta(x))A - B]$, alors l'un des comportements possibles pour un arc singulier est que la vitesse soit constante le long de cet arc. Sur un intervalle le long duquel ce ne serait pas le cas, alors la quantité $[p - \sin(\theta(x))A - B]$ doit s'annuler. L'équation adjointe (1.3), nous donne l'expression suivante pour exprimer la dérivée de p :

$$\dot{p} = q \cos(\theta(x)) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = \frac{y}{\rho(y)} \cos(\theta(x)) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x}$$

Si $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ n'est pas identiquement nulle, alors, la dérivée temporelle de $[p - \sin(\theta(x))A - B]$ est de la forme $C + \dot{y}D = 0$ où⁵ les deux expressions C et D sont indépendantes de \dot{y} . On en déduit que l'un des comportements possibles pour un arc extrémal singulier est décrit par l'équation différentielle $\dot{y} = -\frac{C}{D}$.

Si $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ est identiquement nulle, alors, p et $\sin(\theta(x))$ sont des constantes. La dérivée temporelle $[p - \sin(\theta(x))A - B]$ est de la forme $(\dot{y}D)$ où D dépend de y , $\rho(y)$, $\rho'(y)$ et $\rho''(y)$. Comme $\dot{y} \neq 0$, alors $D = 0$ et l'on calcule sa dérivée temporelle. Cette dernière est de la forme $(\dot{y}E)$ où E dépend de y , $\rho(y)$, et des dérivées successives de ρ jusqu'à l'ordre 3. Répéter cette opération ne fait apparaître aucune information nouvelle. Ainsi, un arc singulier extrémal de ce type n'existe que si la fonction de rendement est de la forme définie par l'hamiltonien (1.6), ce qui n'est presque jamais le cas.

Ces conclusions sont aussi valables dans la configuration $y > 0$ et $q = -\frac{|y|}{\rho(y)}$, ainsi que lorsque $y < 0$, ou autrement dit, pour tout type d'arc singulier.

5. Les expressions exactes de C et D , nécessaires si l'on désire programmer une recherche numérique d'extrémal singulière, sont données par O. Oukacha dans sa thèse [Ouk17].

1.4 Étude de cas

La dernière section de ce chapitre présente les résultats obtenus pour chacun des trois cas d'étude détaillés plus tôt. Les stratégies optimales — qu'elles soient *garanties* ou *considérées comme* — ont été déterminées à la suite d'une analyse systématique. Il nous semble que seule manque une étude, ou plutôt une exploration numérique, visant à déterminer si le troisième cas d'étude, présente une extrémale singulière de la forme $\dot{y} = -\frac{C}{D}$ — voir le paragraphe “si $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ n'est pas identiquement nulle” à la fin de section précédente.

Des trois, seul le dernier cas d'étude permet l'existence de stratégies optimales présentant un *retour en arrière*. Ce point spécifique sera abordé dans la section 1.4.3. Lorsque les extrémales *sans retour en arrière* sont analysées, la condition de maximisation (1.5) est ré-exprimée sous la forme ci-dessous le long des intervalles sur lesquels $y(t) > 0$.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \kappa(1) > 1 \\ 0 & \text{si } -1 < \kappa(t) < 1 \\ -1 & \text{si } \kappa(t) < -1 \end{cases} \quad (1.7)$$

La quantité $\kappa(t)$ est alors analysée lorsqu'elle atteint les surfaces de commutation $\kappa \equiv -1$ et $\kappa \equiv 1$, mais aussi lorsque $\kappa(t) = 0$. En effet, lorsque le profil de route ne permet pas l'arrêt du mobile sans intervention de la variable de contrôle, cela veut dire que $u(t) \in [-1, 0[$ en fin de trajectoire, ce qui correspond à $\kappa(t) \leq -1$. Comme $\kappa(t)$ est positive en début de trajectoire — pour cause de non retour en arrière — et qu'elle doit devenir négative alors $\kappa(t)$ doit traverser la surface $\kappa \equiv 0$. Conséquemment, il existe un temps t^* tel quel $\kappa(t^*) = 0$ et $\dot{\kappa}(t^*) < 0$ (pour cela, on démontre que $\kappa(t^*) = 0$ ne peut pas être un point d'inflexion). Ce raisonnement permet de déduire le signe de H , la valeur de l'hamiltonien le long des extrémales, puis d'analyser ce qu'il passe au niveau des surfaces de commutation.

1.4.1 Route plate sans frottement

Lorsque la route est plate et que le coefficient de frottement est nul, le système (Σ_1) est réduit à un simple système *double-intégrateur*. La stratégie optimale est la même que celle du problème consistant à minimiser la norme L^1 du contrôle — voir [Ros06], par exemple. Plus précisément, lorsque $T_f > T_{min}$, il ne peut pas y avoir d'arc singulier, le mobile n'attend pas à l'arrêt que ce soit en début ou fin de trajectoire, seules deux commutations ont lieu. La seule extrémale est celle engendrée par la stratégie

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, \Delta t[\\ 0 & \text{pour } t \in [\Delta t, T_f - \Delta t[\\ -1 & \text{pour } t \in [T_f - \Delta t, T_f] \end{cases} \quad (1.8)$$

où la condition terminale $x_f = \Delta t T_f - \Delta t^2$ permet le calcul explicite de Δt :

$$\Delta t = \frac{1}{2} \left(T_f - \sqrt{T_f^2 - 4x_f} \right) \quad (1.9)$$

Cette relation est bien définie. En effet, d'après (1.2), à partir du moment où $T_f > T_{min}$:

$$(T_f^2 - 4x_f) > 0$$

Comme le suggère l'expression de Δt (1.9), la stratégie optimale est indépendante de la fonction de rendement. Bien que le détail des calculs n'ait pas été reproduit ici, la même constatation peut être tirée lors de l'étude du comportement de la fonction de commutation.

Cette stratégie optimale est illustrée à la figure 1.4, avec et sans fonction de rendement. Les figures 1.4b et 1.4d montrent les trajectoires de q , $\frac{y}{\rho(y)}$ et $-\frac{y}{\rho(y)}$, qui commandent les commutations de la variable de contrôle. La trajectoire (x, y) est montrée en figure 1.4a et la fonction de rendement non-constante utilisée pour établir l'exemple de la figure 1.4d est

représentée à la Fig. 1.4c. Le graphe de la fonction est en pointillé tandis que le tracé rouge plein indique les valeurs qui ont été effectivement visitées.

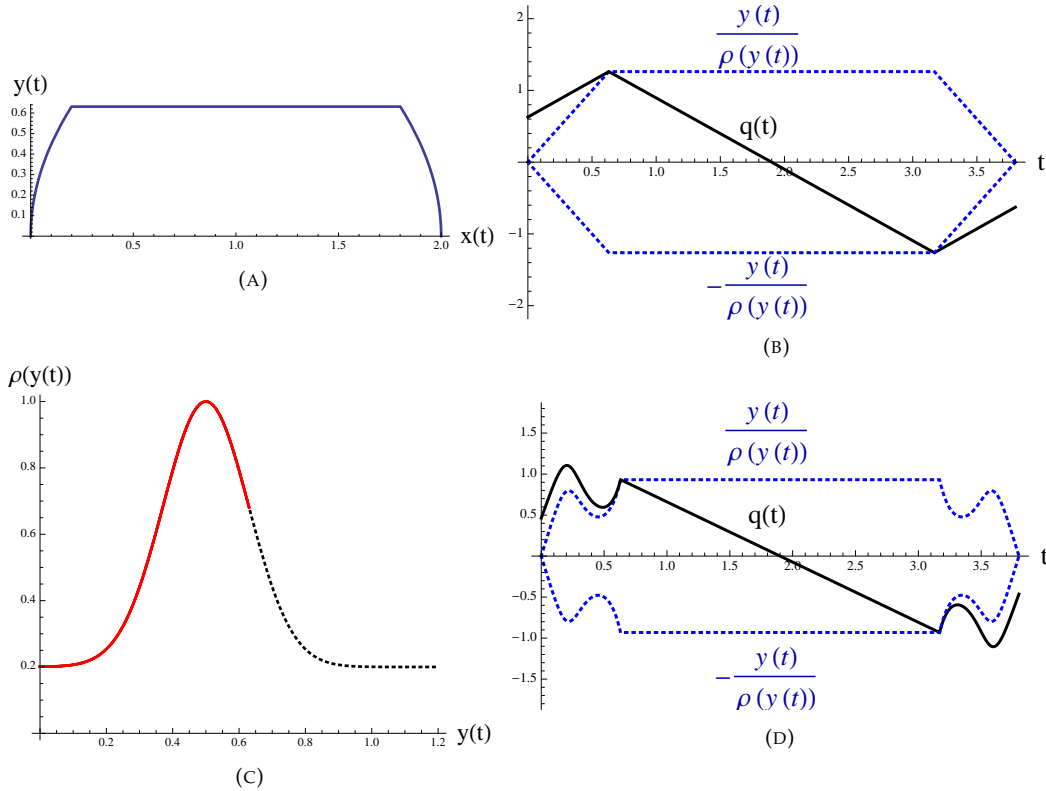


FIGURE 1.4 – Trajectoire optimale pour le système *double intégrateur* (rendement constant et non-constant). Paramètres : $x_f = 2$, $T_{min} \approx 2.82$ et $T_f = 3.8$.

1.4.2 Route plate avec frottement

Dans ce second cas d'étude, le coefficient de frottement n'est plus supposé nul. Le système (Σ_1) reste toutefois linéaire, de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u - \alpha y \end{cases}$$

La suite de cette section est séparée en deux parties : le problème est tout d'abord traité lorsque le rendement est constant — i.e. $\rho(y) = 1$ — puis lorsqu'il ne l'est plus. Dans le premier cas, la stratégie optimale est *complètement établie et démontrée*. Lorsque le rendement n'est pas constant, la stratégie proposée s'appuie sur le cas à rendement constant, quelques propositions spécifiques et de l'exploration numérique.

Indépendamment de la fonction de rendement, l'analyse de la quantité $\kappa(t)$, telle qu'elle est expliquée au début de la section 1.4 donne le point de départ suivant :

1. le contrôle doit-être égal à 1 sur un intervalle de la forme $[0, \varepsilon[$;
2. le contrôle doit-être égal à -1 sur un intervalle de la forme $[T_f - \varepsilon, T_f]$;
3. une trajectoire extrémale peut comprendre un ou plusieurs arcs singuliers, ces derniers étant caractérisés par $\dot{y} = 0$ et $y > 0$.

Une conséquence immédiate du troisième point est l'absence d'arc singulier de la forme $q = -y$, c'est-à-dire avec $u \in [-1, 0]$. En effet, puisque $y > 0$ le long de l'arc singulier, la contrainte $\dot{y} = 0$ ne peut-être réalisée que par une valeur positive du contrôle. Par la suite un contrôle singulier sera noté $u_{sing} \in]0, 1[$.

Fonction de rendement constante

Un premier lemme permet de réduire la liste des stratégies candidates à l'optimalité (où q_0 désigne la valeur initiale de la seconde composante du vecteur adjoint).

Lemme 1.

1. Si le contrôle commute à la valeur 0, alors il ne peut plus redevenir positif.
2. Si le contrôle commute à la valeur $u = -1$, alors il ne peut plus commuter à la valeur 0.
3. Il ne peut y avoir, au plus, qu'un arc singulier.
4. Pour une trajectoire extrémale comprenant un arc singulier :

- (a) $y = \sqrt{\frac{q_0}{\alpha}}$ le long de l'arc singulier ;
- (b) le contrôle correspondant est $u_{sing} = \sqrt{\alpha q_0}$;
- (c) la première composante du vecteur adjoint⁶ vérifie $p = 2\sqrt{\alpha q_0}$.

D'après ce premier lemme, la situation se résume aux trois possibilités suivantes :

1. $u = 1$, puis $u = 0$ et finalement $u = -1$;
2. $u = 1$, puis $u = u_{sing}$, $u = 0$ et finalement $u = -1$;
3. $u = 1$, puis $u = u_{sing}$, $u = 1$, $u = 0$ et finalement $u = -1$.

Un second lemme, qui n'est pas reproduit ici, élimine la troisième stratégie, il ne reste que les deux premières à examiner. Nous inspectons d'abord la stratégie comprenant un arc singulier.

Lemme 2. *Considérons la stratégie :*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in [0, t_1[\\ \sqrt{\alpha q_0} & \text{for } t \in [t_1, t_2[\\ 0 & \text{for } t \in [t_2, t_3[\\ -1 & \text{for } t \in [t_3, T_f] \end{cases} \quad (1.10)$$

1. Si (1.10) est extrémale, alors $t_3 - t_2 = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \sqrt{2})$.
2. Pour des paramètres α et x_f fixés, il existe un temps $T_{lim} > 0$ tel que pour tout $T_f > T_{lim}$ la stratégie (1.10) est candidate à l'optimalité.

Il ne reste alors qu'une seule stratégie à examiner, à savoir :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, t_1[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_1, t_2[\\ -1 & \text{pour } t \in [t_2, T_f] \end{cases} \quad (1.11)$$

Pour des paramètres α , x_f , $T_f > T_{min}$, il est toujours possible de calculer un contrôle de la forme (1.11) joignant $(0, 0)^t$ à $(x_f, 0)^t$ en un temps T_f fixé :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + e^{\alpha T_f} - \sqrt{1 + 2e^{\alpha T_f} + e^{2\alpha T_f} - 4e^{\alpha^2 x_f + \alpha T_f}} \right) \right] \\ t_2 = \frac{1}{\alpha} \ln \left[(1 - e^{\alpha t_1} + e^{\alpha T_f}) \right] \end{cases} \quad (1.12)$$

La trajectoire engendrée par (1.11) est clairement optimale lorsque $T_{min} < T_f < T_{lim}$ puisqu'il n'existe aucune autre trajectoire extrémale. La solution de (\mathcal{P}_1) est établie en regardant plus en détails ce qu'il se passe lorsque $T_f > T_{lim}$.

Théorème 2 (Stratégie optimale pour une fonction de rendement constante).

Pour un jeu de paramètres α , x_f and T_f fixés, soit $X(t) : t \mapsto (x(t), y(t))^t$ la trajectoire de (Σ_1) joignant $(0, 0)^t$ à $(x_f, 0)^t$ engendrée par (1.11).

6. Qui est constante car $\theta(x) \equiv 0$.

1. Si $(X(t), p_0, q(t))$ est une trajectoire extrémale du principe du maximum de Pontryagin, alors p_0 et q_0 sont calculés comme suit :

$$p_0 = \frac{e^{-\alpha t_2} (e^{\alpha t_1} - 1) (1 + e^{2\alpha(t_2 - t_1)})}{e^{\alpha(t_2 - t_1)} - 1}$$

$$q_0 = \frac{e^{-2\alpha t_1}}{\alpha} (e^{\alpha t_1} - 1) (1 + e^{\alpha t_1} (p_0 - 1))$$

2. Pour $T_f > T_{lim}$, où T_{lim} est défini dans le lemme 2, alors $(X(t), p_0, q(t))$ n'est pas une trajectoire extrémale.
3. La **solution du problème de contrôle optimal** (\mathcal{P}_1) sur une route plate, avec frottement et une fonction de rendement constante est :
- (a) pour $T_{min} < T_f \leq T_{lim}$, où T_{lim} est défini dans le lemme 2, la stratégie optimale est (1.11);
- (b) pour $T_f > T_{lim}$, la stratégie optimale est (1.10) et comprend un arc singulier.

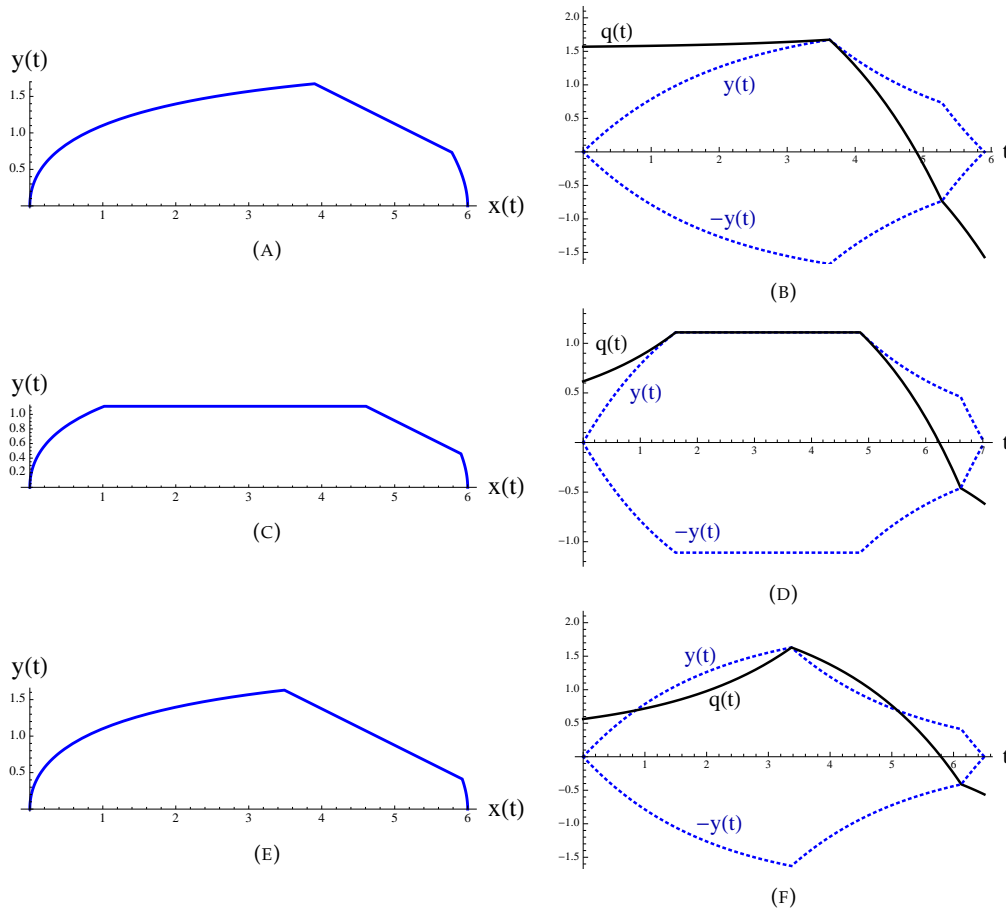


FIGURE 1.5 – Trajectoires optimales et exemples de trajectoire non-extrémale du deuxième cas d'étude pour un rendement constant. Les figures 1.5a et 1.5b correspondent à $T_f = 5.9$. Les figures 1.5c à 1.5f correspondent à $T_f = 6.5$. Paramètres : $\alpha = 0.5$, $x_f = 6$, $T_{min} \approx 5.52$ et $T_{lim} \approx 5.95$.

Le théorème 2 est illustré dans la figure 1.5 pour $x_f = 6$ et $\alpha = 0.5$. Les figures 1.5a et 1.5b montrent la trajectoire optimale pour $T_f < T_{lim}$, tandis que les figures 1.5c et 1.5d correspondent au cas $T_f > T_{lim}$. En particulier, les figures 1.5e and 1.5f illustrent le fait que la stratégie (1.11) — i.e. sans arc singulier — n'est pas extrémale pour $T_f > T_{lim}$. Ces deux dernières figures ont été obtenues de la manière suivante : t_1 et t_2 sont calculés en suivant les formules 1.12, et si l'on suppose que la stratégie (1.11) est extrémale, le théorème 2 donne les expressions de p_0 et q_0 . Ces paramètres sont suffisants pour calculer les trajectoires du

système hamiltonien, ce qui permet de constater que $q(t)$ intersecte $y(t)$ en un temps $t < t_1$, c'est à dire trop tôt.

Fonction de rendement non-constante

Lorsque la fonction de rendement n'est pas constante, la plupart des lemmes établis dans la partie précédente ne peuvent plus être établis, ou ne sont que partiellement maintenus. Pour cette raison, nous proposons une méthodologie de recherche de la stratégie optimale basée sur le troisième point du théorème 2.

1. Calcul de la trajectoire de (Σ_1) engendrée par la stratégie (1.11) — i.e. sans arc singulier.
2. Si possible, calculer la trajectoire de (Σ_1) engendrée par la stratégie (1.10) — avec un seul arc singulier.
3. Vérifier laquelle de ces deux trajectoires est extrémale, toute ambiguïté pouvant être levée par le calcul du coût.
4. Il se peut qu'aucune des deux stratégies ci-dessus ne soit une trajectoire extrémale. En effet, lorsque la fonction de rendement n'est pas constante, certaines affirmations du lemme 1 ne sont plus valables. En particulier, il peut y avoir plus d'une commutation du contrôle entre les valeurs $u = 0$ et $u = -1$. Lorsque cette situation se présente, nous proposons d'investiguer une nouvelle stratégie, donnée en (1.13).

Les temps de commutation d'une trajectoire de (Σ_1) , engendrée par (1.11) et vérifiant les contraintes $X(T_f) = (x_f, 0)^t$, sont toujours donnés par les relations (1.12). Cependant, dans le cas d'une trajectoire engendrée par (1.10), la relation $t_3 - t_2 = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \sqrt{2})$ du lemme 2 n'est plus vérifiée. Le calcul d'une telle trajectoire repose donc sur un schéma numérique⁷.

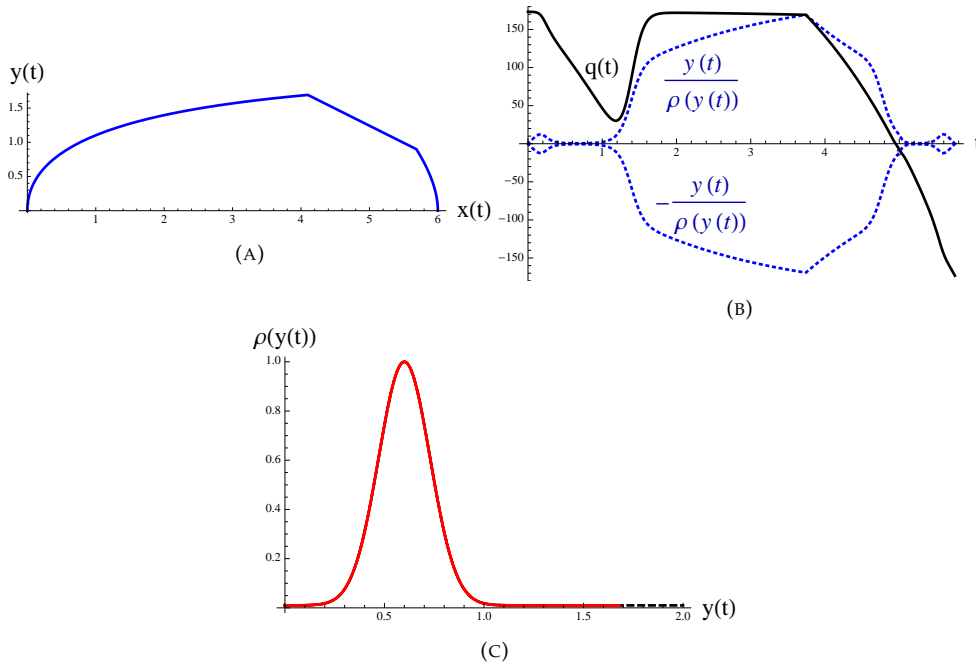


FIGURE 1.6 – Trajectoire extrémale, considérée comme optimale, du second cas d'étude lorsque la fonction de rendement n'est pas constante et $T_f < T_{lim}$. Paramètres : $\alpha = 0.5$, $x_f = 6$, $T_{min} \approx 5.52$, $T_{lim} \approx 5.8$, et $T_f = 5.75$.

Trajectoires présentant deux étapes d'activation $u = -1$

Les deux contrôles présentés jusqu'ici ne sont pas suffisants pour décrire l'ensemble des stratégies extrémales rencontrées lors de la résolution de ce cas. En effet, le lemme 1 ne

7. L'explication détaillée pourra être trouvée dans la thèse de O. Oukacha [Ouk17] ou dans [OB20].

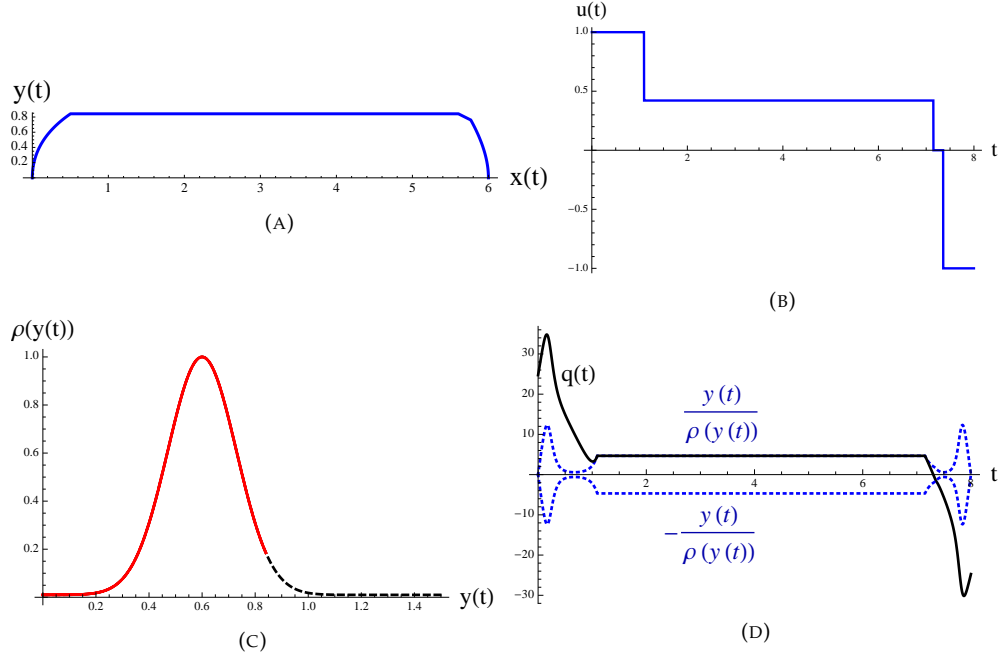


FIGURE 1.7 – Trajectoire extrême, considérée comme optimale, du second cas d'étude lorsque la fonction de rendement n'est pas constante et $T_{lim} < T_f$.
Paramètres : $\alpha = 0.5$, $x_f = 6$, $T_{min} \approx 5.52$, $T_{lim} \approx 5.8$, et $T_f = 8$.

garanti plus le fait que certaines commutations n'ont lieu au plus qu'une fois. Ainsi, nous nous sommes intéressés à une stratégie de la forme

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, t_1[\\ \alpha y(t_1) & \text{pour } t \in [t_1, t_2[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_2, t_3[\\ -1 & \text{pour } t \in [t_3, t_4[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_4, t_5[\\ -1 & \text{pour } t \in [t_5, T_f] \end{cases} \quad (1.13)$$

Pour comprendre les motivations d'une telle stratégie, revenons sur l'avant dernier paragraphe de la discussion de la section 1.1. La fonction de coût est $\frac{|yu|}{\rho(y)}$. Elle tend vers 0 lorsque y tend vers 0 puisque la fonction de rendement ne s'annule pas à vitesse nulle. D'autre part, lorsque la fonction de rendement n'est pas constante, une activation du contrôle est attendue lorsque ce dernier est maximal. Les stratégies (1.10) et (1.11) précédemment décrites semblent réaliser un compromis entre ces deux comportements. Ainsi, lorsqu'aucune de ses stratégies n'est extrême, nous en concluons qu'un compromis ne peut pas être réalisé. La stratégie qui nous semble alors pertinente en terme de minimisation du coût consiste à profiter des deux comportements décrits ci-dessus. Autrement dit, deux intervalles de temps sur lesquels $u = -1$ doivent être envisagés : un premier intervalle lorsque le rendement est assez grand, et un second lorsque la vitesse est suffisamment basse.

De fait, la stratégie (1.13) ci-dessus se révèle être extrême lorsque les stratégies (1.10) et (1.11) ne le sont pas. La trajectoire correspondant à cette stratégie est calculée en adaptant le schéma numérique précédemment utilisé.

Les stratégies discutées dans le cas d'une fonction de rendement non constante sont illustrées dans les figures 1.6, 1.7 et 1.8 pour un même jeu de paramètres x_f et α et une même fonction coût. Le cas $T_{min} < T_f < T_{lim}$ est montré en figure 1.6, tandis que le cas $T_f > T_{lim}$ est illustré dans les figures 1.7 et 1.8. La figure 1.8 correspond à une valeur de T_f pour laquelle aucune des deux stratégies (1.11) et (1.10) ne produit de stratégie extrême. Cependant, la stratégie (1.13) l'est, nous la considérons donc comme optimale. Remarquons que dans l'exemple

utilisé pour les figures 1.6, 1.7 et 1.8, une trajectoire à deux étapes d'activation $u = -1$ ne se présente que lorsque T_f est compris dans un intervalle relativement petit.

Les figures 1.6c, 1.7c et 1.8b montrent, en rouge, les valeurs visitées par la fonction de rendement. Les parties bleues que l'on voit dans la figure 1.8b mettent en évidence les deux périodes d'activation $u = -1$. On remarquera que l'activation $u = -1$ à haut rendement ne correspond pas exactement au rendement maximal.

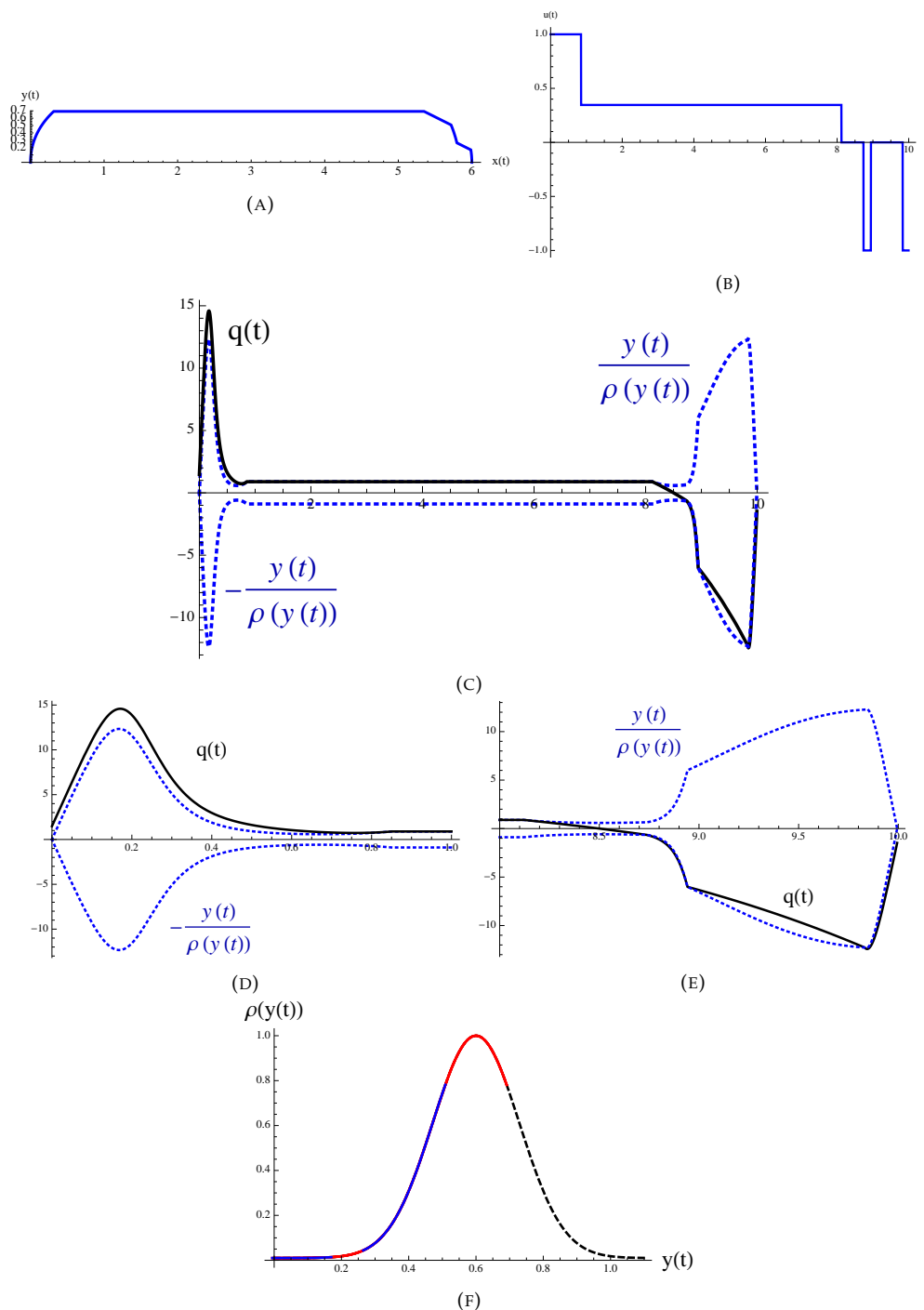


FIGURE 1.8 – Trajectoire extrême, considérée comme optimale, du second cas d'étude lorsque la fonction de rendement n'est pas constante et $T_{lim} < T_f$.

Paramètres : $\alpha = 0.5$, $x_f = 6$, $T_{min} \approx 5.52$, $T_{lim} \approx 5.8$, et $T_f = 10$.

Les figures 1.8d et 1.8e détaillent le début et la fin des trajectoires de la figure 1.8c.

Remarque 2. L'existence de trajectoires extrémales du type de celles présentées à la figure 1.8 n'est pas systématique pour toute fonction de rendement. Par exemple, dans le cas de la fonction de rendement de la figure 1.4c, où $\rho(0) = 0.2$, il ne semble pas exister de trajectoire de ce type. Nous interprétons ceci comme une traduction du fait que le rapport entre le minimum et le maximum de la fonction de rendement n'est pas avantageux, ou suffisamment significatif, et qu'il est plus intéressant de freiner seulement à vitesse faible.

1.4.3 Un profil de route non-plate

Ce dernier cas d'étude s'attache à présenter un profil de route non-plate, sans frottement. Le système (Σ_1) ainsi que le profil de la route — représenté à la figure (1.9) sont les suivants :

$$(\Sigma_1) \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u - \sin(\theta(x)) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \theta(x) \text{ décroît pour } x \in [-10, -6.5[\\ \theta(x) \text{ croît pour } x \in] -6.5, -1[\\ \theta(x) \text{ est constant pour } x \geq -1 \end{cases}$$

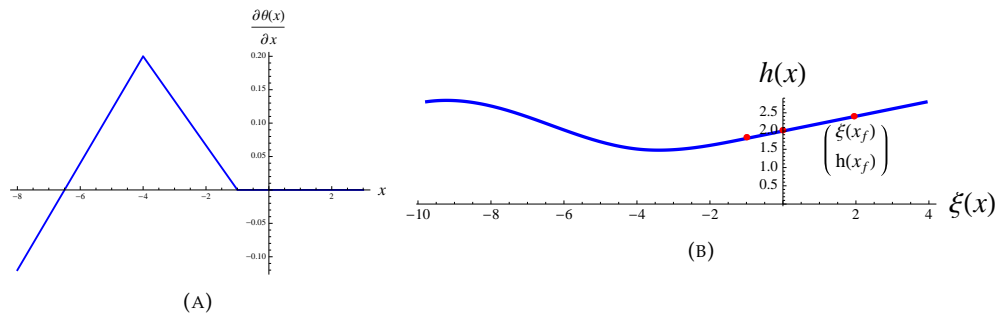


FIGURE 1.9 – Dérivée de θ par rapport à la variable x , et profil de la route reconstruit dans les coordonnées initiales du problème : $(\xi, h)^t$. Les points rouges que l'on voit dans la figure 1.9b marquent les positions où $x = -1$, $x = 0$ and $x = x_f$ dans cet ordre — $T_{min} \approx 2.885$ et $T_f^{1,0} \approx 5.01$.

Dans le but de simplifier les notations, et ce lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous utilisons la notation $K = \sin(\theta(x))$ lorsque $x \geq -1$ et que la pente est constante. Dans cette section, l'abscisse curviligne terminale sera $x_f = 2$, et le temps minimal pour rejoindre $X(T_f)$ est $T_{min} = \frac{2\sqrt{x_f}}{\sqrt{1-K^2}}$.

Comme précédemment, les trajectoires extrémales anormales ne jouent aucun rôle dès que $T_f > T_{min}$. La première particularité de ce cas d'étude est que le mobile est susceptible de s'arrêter sans que le contrôle $u = -1$ ne soit activé. Par conséquent, le raisonnement suivi lors des deux cas précédents⁸ ne pas être reproduit systématiquement.

Dans un premier temps, soit $T_f^{1,0}$ le temps nécessaire pour rejoindre $X = (x_f, 0)^t$ avec la stratégie :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, t_c[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_c, T_f^{1,0}] \end{cases} \quad (1.14)$$

Lemme 3. 1. Si (1.14) est une stratégie extrême, alors l'hamiltonien est nul le long de la trajectoire correspondante.

2. L'équivalence suivante est vérifiée :

$$\rho'(y(t_c)) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (1.14) \text{ est une stratégie extrême}$$

8. C'est-à-dire en sachant que la surface $\kappa = 0$ doit-être traversée.

3. Pour tout $T_f > T_f^{1,0}$ la stratégie suivante, qui consiste à attendre au début ou à la fin du parcours pendant un temps arbitrairement long, est aussi extrémale :

$$u(t) = \begin{cases} K & \text{for } t \in [0, t_1[\\ 1 & \text{for } t \in [t_1, t_1 + t_c[\\ 0 & \text{for } t \in [t_1 + t_c, T_f - t_2[\\ K & \text{for } t \in [T_f - t_2, T_f[\end{cases} \quad (1.15)$$

où $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ et $t_1 + t_2 = T_f - T_f^{1,0}$.

La question suivante reste cependant en suspens : que se passe-t-il lorsque $T_f \geq T_f^{1,0}$ mais que $\rho'(y(t_c)) < 0$?

En effet, d'après le lemme 3, cette stratégie ne peut pas être extrémale, ce qui suggère l'existence d'un ou plusieurs arcs singuliers. Comme nous l'avons vu au début de la section 1.4, un arc singulier est caractérisé par $\dot{y} = 0$ puisqu'il aurait lieu sur un morceau de route où $\theta(x)$ est constant. Une stratégie possible est alors :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in [0, t_c[\\ K & \text{for } t \in [t_c, t_c + t_{sing}[\\ 0 & \text{for } t \in [t_c + t_{sing}, T_f] \end{cases} \quad (1.16)$$

La trajectoire de (Σ_1) engendrée par cette stratégie présente un arc singulier sur un intervalle de la forme $[t_c, t_c + t_{sing}[$ que l'on peut choisir aussi grand que nécessaire de sorte à résoudre la contrainte $x(T_f) = x_f$. Si l'on suppose que la stratégie (1.16) est extrémale, alors :

1. $H = 0$ puisque $u(t) = 0$ pour $t \in [t_c + t_{sing}, T_f]$;
2. la dérivée temporelle de $\kappa = \frac{q\rho(y)}{y}$, évaluée au temps t_c est $\dot{\kappa}(t_c) = -\frac{\rho'(y(t_c))}{\rho(y(t_c))}K$ ce qui démontre qu'un arc singulier ne peut apparaître que si $\rho'(y(t_c)) = 0$.

Le temps de parcours correspondant à la stratégie (1.16), noté $T_f^{1,s,0}$, est déterminé de manière unique en suivant la démarche ci-dessous et la trajectoire correspondante est extrémale :

1. t_c est déterminé de sorte à ce que $\rho(y(t_c))$ soit le maximum de $\rho(\cdot)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$;
2. t_{sing} et $T_f^{1,s,0}$ sont déterminés de sorte à résoudre la contrainte $X\left(T_f^{1,s,0}\right) = \left(x_f, 0\right)^t$.

Comme précédemment, si la stratégie (1.16) est extrémale, alors pour tout $T_f > T_f^{1,s,0}$ la stratégie consistant à attendre à l'arrêt, au début ou en fin de trajectoire pendant un temps arbitrairement long est aussi extrémale :

$$u(t) = \begin{cases} K & \text{pour } t \in [0, t_1[\\ 1 & \text{pour } t \in [t_1, t_1 + t_c[\\ K & \text{pour } t \in [t_1 + t_c, t_1 + t_c + t_{sing}[\\ 0 & \text{pour } t \in [t_1 + t_c + t_{sing}, T_f - t_2[\\ K & \text{pour } t \in [T_f - t_2, T_f] \end{cases} \quad \text{où } \begin{cases} t_1 \geq 0, t_2 \geq 0 \\ t_1 + t_2 = T_f - T_f^{1,s,0} \end{cases} \quad (1.17)$$

Une trajectoire de ce type est représentée⁹ à la figure 1.10.

Trajectoires en temps petit

Le profil de la route est tel que le problème (\mathcal{P}_1) est invariant par translation le long de l'axe x , tant que ce déplacement est effectué dans l'intervalle $x \in [-1; +\infty[$. Ainsi, tant que le temps final n'est pas suffisant grand pour permettre au mobile de s'échapper de cet intervalle, les extrémales avec retour en arrière sont exclues de l'analyse.

9. Les trajectoires engendrées par les stratégies (1.14) et (1.15) étant des versions simplifiées de celles représentées ici, nous avons décidé de ne pas en inclure dans le manuscrit pour limiter la taille du document.

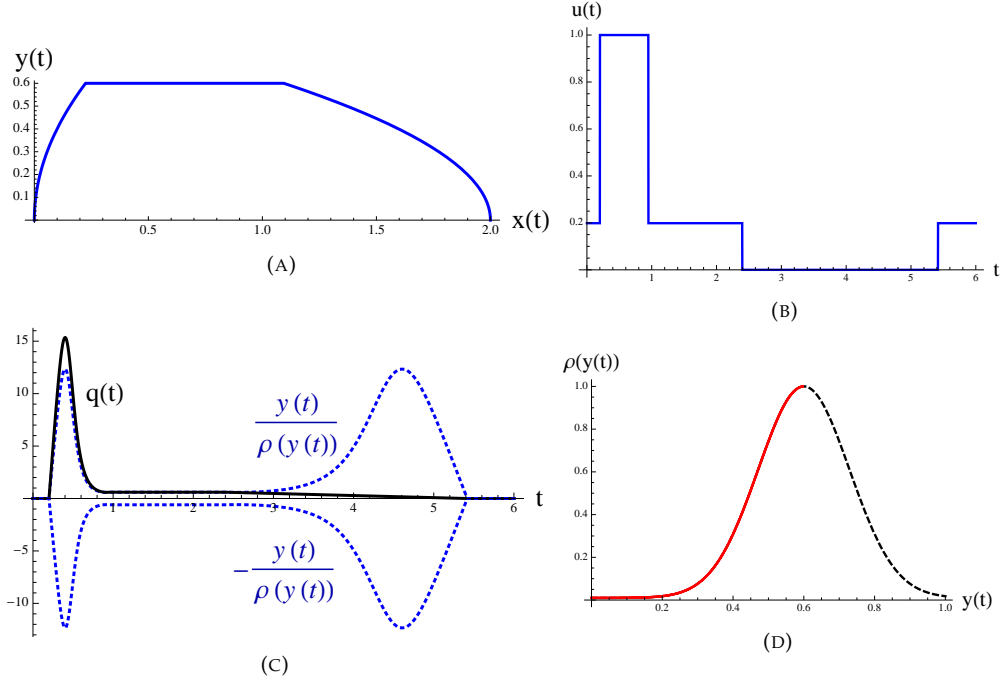


FIGURE 1.10 – Trajectoire extrémale du troisième cas d'étude, lorsque $T_f^{1,s,0}$ existe et que $T_f > T_f^{1,s,0}$. Paramètres : $T_f^{1,s,0} \approx 5.21$ et $T_f = 6$. Le coût associé à cette trajectoire vaut 3.605.

Nous définissons le temps T_{back} comme suit :

$$T_{back} = \max_{\mathbb{R}^{+*}} \left\{ T_f \text{ tel que } \forall u \in L^\infty[0, T_f] \left\{ \begin{array}{l} X(0) = X_0, X(T_f) = X_f \\ \theta(x(t)) = \theta(0) \end{array} \right. \forall t \in [0, T_f] \right\}$$

Une trajectoire définie pour un temps final T_f compris dans l'intervalle $]T_{min}, T_{small}]$ où $T_{small} = \min(T_{back}, T_f^{1,0})$ est appelée **trajectoire en temps petit**.

Lemme 4 (Trajectoires en temps petit).

1. Une trajectoire en temps petit optimale ne comprend pas d'arc arrière.
2. Les extrémales en temps petit ne comprennent pas d'arc singulier de la forme $y = 0$.
3. Soit y_s la vitesse (constante) correspondant à l'arc singulier d'une trajectoire en temps petit, alors $\frac{\partial \rho}{\partial y}(y_s) < 0$.
4. Soit une extrémale en temps petit comprenant un arc singulier dont la vitesse (constante) est notée y_s , alors :

$$q_0 = \frac{Ky_s^2 \rho'(y_s)}{(K-1)\rho(y_s)^2} \text{ et } p_0 = K \frac{\rho(y_s) - y_s \rho'(y_s)}{\rho(y_s)^2}$$

Les informations fournies par le lemme 4, permettent d'établir un schéma numérique dans le but de calculer les trajectoires en temps petit. La figure 1.11 donne un exemple d'une telle trajectoire.

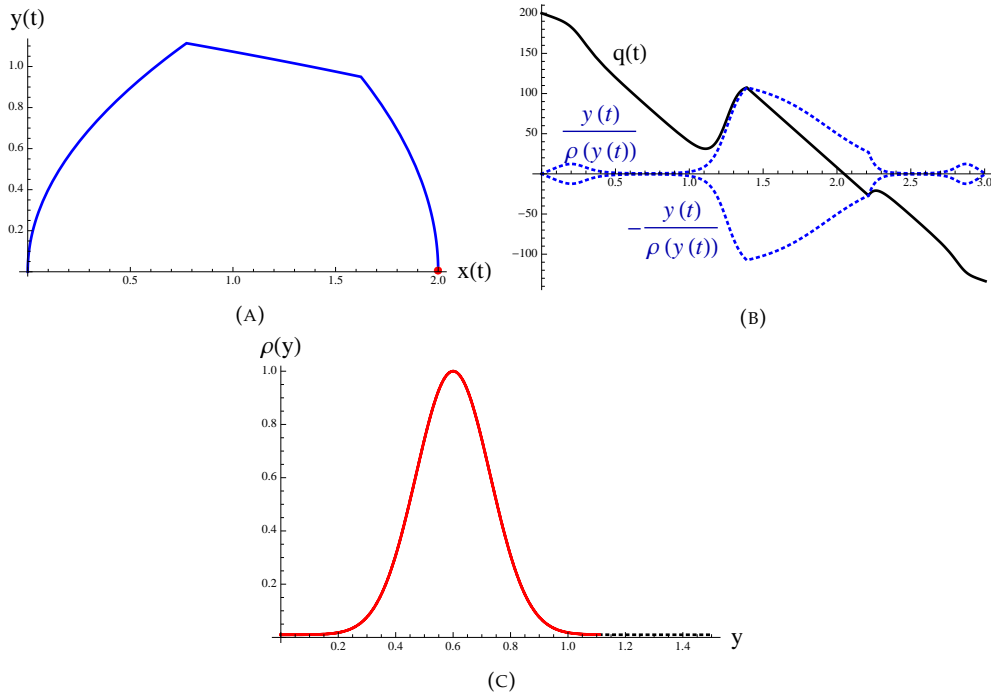


FIGURE 1.11 – Trajectoire extrême en temps petit du troisième cas d'étude.
Paramètres : $T_{min} \approx 2.885$, $T_f = 3$.

Synthèse

Pour finir, nous proposons d'aborder le problème (\mathcal{P}_1) avec le profil de route de la figure 1.9 en suivant la démarche ci-dessous.

1. Commencer par la stratégie (1.14). Le signe de $\frac{\partial \rho}{\partial y}(y(t_c))$ détermine quelle stratégie entre (1.14) and (1.16) est pertinente. Soit \bar{T}_f le temps final correspondant à cette stratégie — il s'agit de choisir entre $T_f^{1,0}$ et $T_f^{1,s,0}$.
2. Pour $T_f > \bar{T}_f$, une des deux stratégies (1.15) ou (1.17) est extrême et par conséquent candidate à l'optimalité. La figure 1.10 illustre ces deux premières étapes.
3. Pour $T_{min} < T_f < T_{back}$, une stratégie extrême sans arc arrière est calculée. Le comportement de ce type d'extrêmes est similaire à celui rapporté dans la section 1.4.2. Une extrême de ce type est considérée comme optimale. Ceci est illustré dans la figure 1.11 à l'aide d'une trajectoire en temps petit sans arc singulier.
4. Pour $T_{min} < T_f < \bar{T}_f$, comme à l'étape précédente, des extrêmes sans arc arrière sont cherchées comme dans la section 1.4.2. Ceci est illustré à la figure 1.12, pour $T_f = 4.48$, à l'aide d'une extrême présentant deux étapes d'activation $u = -1$. Contrairement au point précédent, le fait qu'il puisse désormais exister des arcs arrières ne permet plus de considérer l'extrême trouvée comme étant optimale.
5. Pour finir, à l'aide d'une exploration numérique, des extrêmes comprenant des arcs arrières sont cherchées. En guise d'exemple, pour $T_f = 4.48$, aucune trajectoire de ce type n'a été trouvée, ce qui amène à penser que la trajectoire de la figure 1.12 est optimale. Des exemples de trajectoires extrêmes présentant des arcs arrières sont montrées en figures 1.13 and 1.14.

Dans le but de mieux comprendre la dernière de ces cinq étapes, plusieurs explorations numériques ont été réalisées en manipulant les valeurs de p_0 and q_0 . Comme attendu, il existe des trajectoires extrêmes comprenant des arcs arrières. Il est toutefois intéressant de noter que ces extrêmes ne sont pas toujours optimales. Par exemple, la trajectoire présentée à la figure 1.13, dont le coût associé est 1.61 nous semble être optimale. La fonction de rendement est la même que celle utilisée dans la figure 1.10. Dans ce cas là, le coût de la stratégie avec arcs arrières est plus faible que celui de la stratégie (1.17) — puisque les arcs

tels que $y = 0$ ne coûtent rien, toutes les stratégies (1.17) ont le même coût, quelle que soit la valeur de $T_f > T_f^{1,s,0}$, c'est à dire 3.605.

Pour finir, la figure 1.14 présente une trajectoire extrémale avec arcs arrières calculée pour une fonction de rendement telle que la valeur $\rho(0)$ est 20 fois plus élevée que celle de la fonction utilisée dans la figure 1.13. Il s'agit là du seul paramètre qui a été modifié dans la construction de ρ . Les maximums des deux fonctions coût sont les mêmes et sont atteints pour la même valeur de la variable y . Le coût associé à la stratégie (1.17) est égal à 0.73, et le coût de la stratégie correspondant à la figure 1.14 est de l'ordre de 1.02. Ainsi, bien qu'extrémale, la trajectoire avec arc arrière n'est pas optimale.

Les figures 1.13d et 1.14d montrent quelles valeurs sont visitées lorsque $u = -1$, tandis que les valeurs visitées lorsque $u = 1$ sont mise en relief dans les figures 1.13e et 1.14e. Les différentes couleurs utilisées sont à mettre en relation avec celles utilisées dans les figures 1.13b et 1.14b. Ainsi, dans le cas de la figure 1.13, $u = -1$ sur trois intervalles de temps représentés en bleu, noir et vert sur la figure 1.13b. Les valeurs de la fonction de rendement visitées pendant ces intervalles sont représentées en bleu, noir et vert (respectivement) dans la figure 1.13d (les zones bleues et vertes correspondent à des vitesses proches de zéro). L'activation $u = 1$ n'a lieu quand à elle que deux fois, ce qui est représenté en bleu et noir dans les figures 1.13b et 1.14e. Un code couleur similaire est utilisé à la figure 1.14.

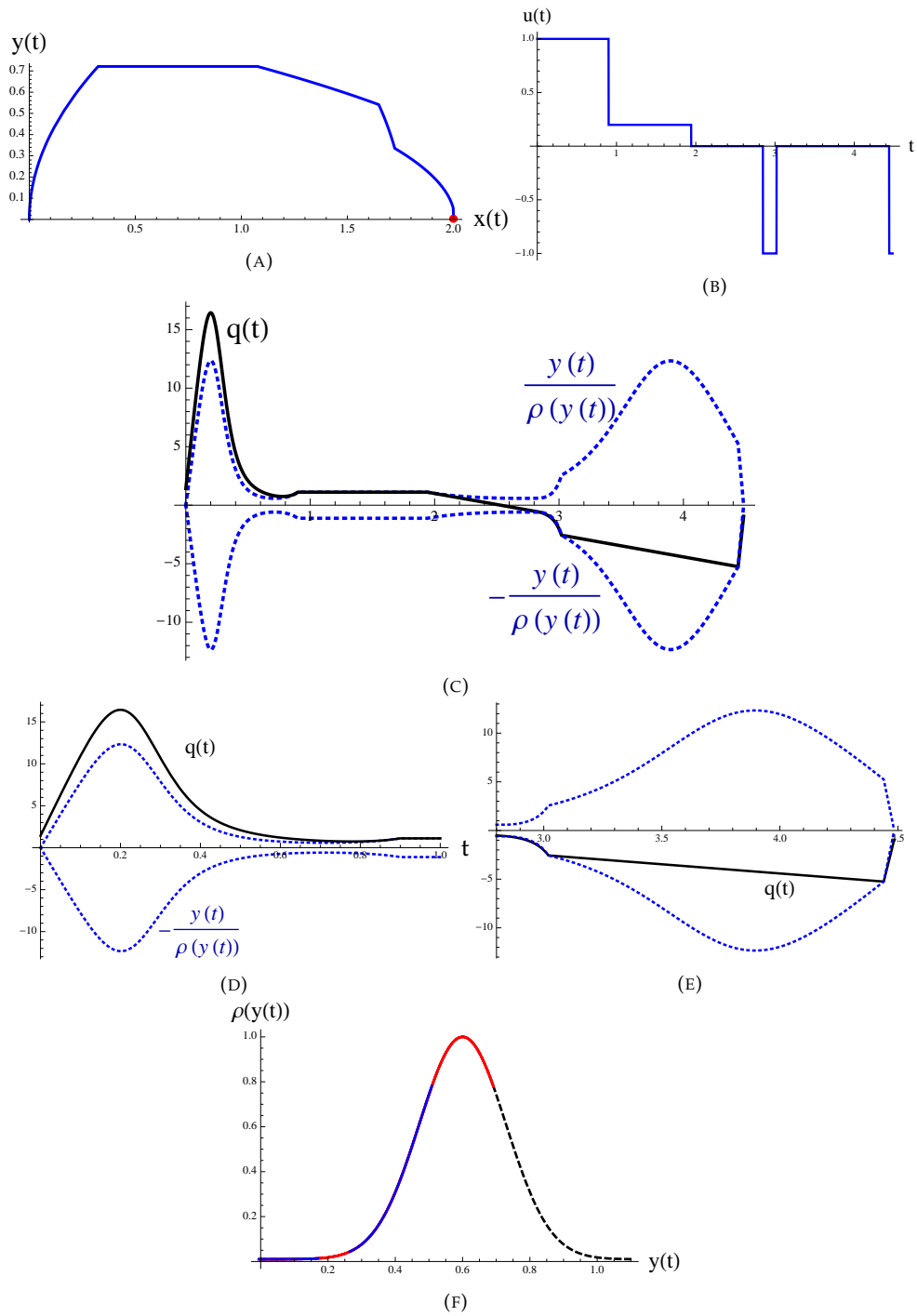


FIGURE 1.12 – Trajectoire extrême du troisième cas d'étude pour $T_f = 4.48$.
 Figure 1.12f : les tracés en bleu correspondent aux instants lorsque $u = -1$.

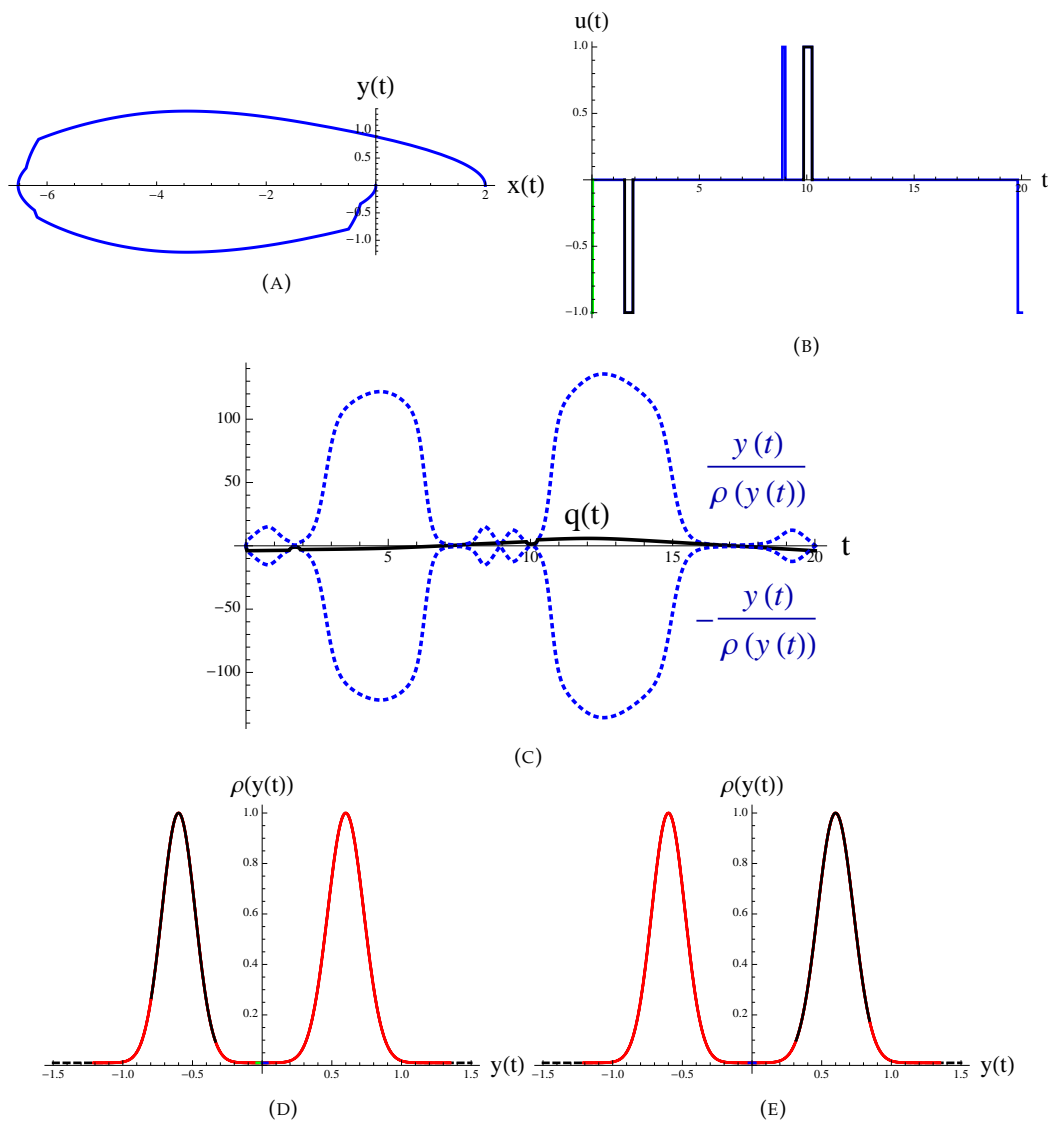


FIGURE 1.13 – Trajectoire extrémale du troisième cas d'étude pour $T_f \approx 17.75$. Le coût correspondant vaut ≈ 1.61 alors que le coût de la stratégie (1.17) — cf. Figure 1.10 — est 3.605.

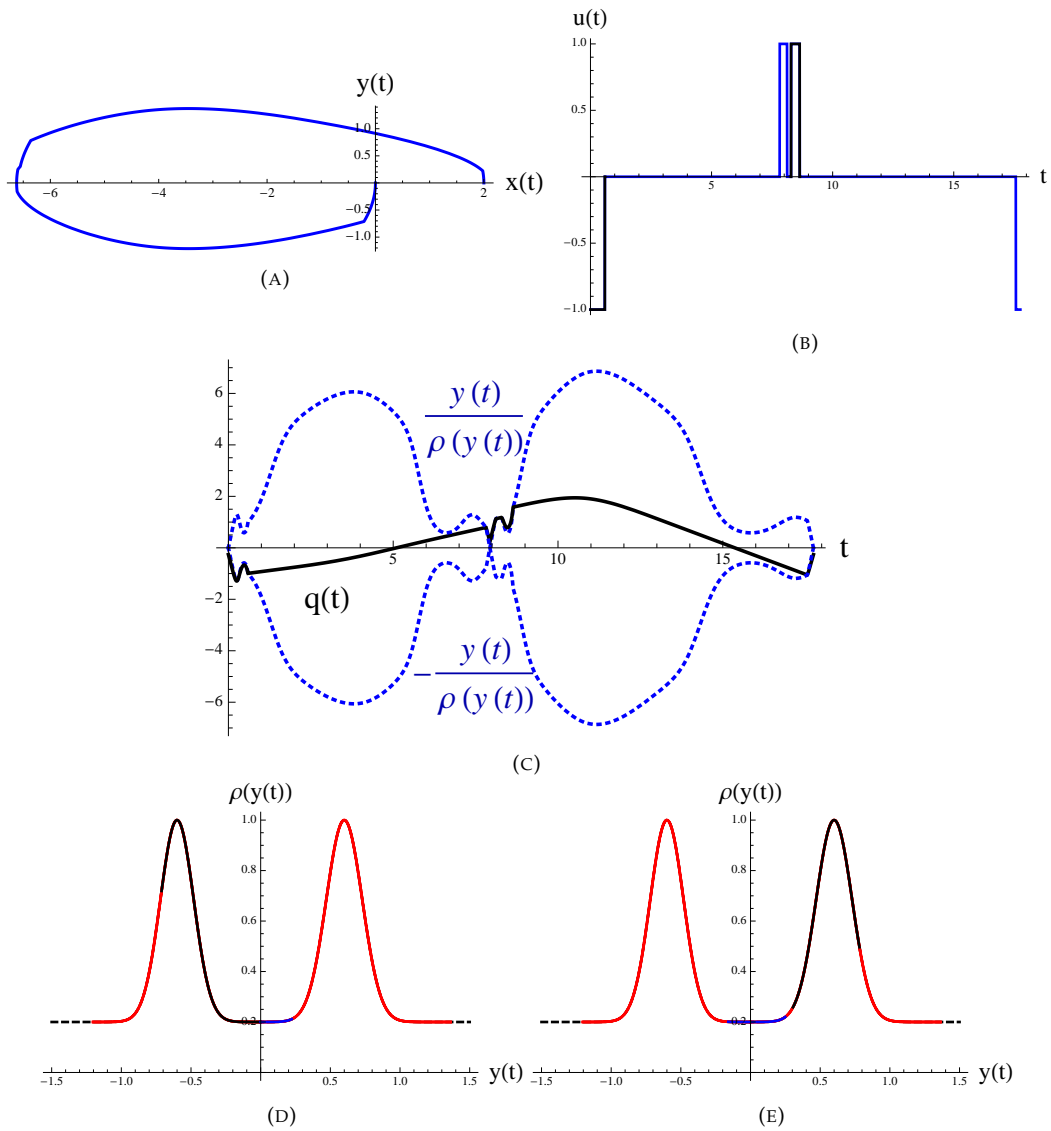


FIGURE 1.14 – Trajectoire extrême du troisième cas d'étude pour $T_f \approx 17.75$. Le coût correspondant vaut ≈ 1.02 alors que le coût de la stratégie (1.17), avec la fonction de rendement des figures 1.14d et 1.14e, est 0.73.

Chapitre 2

Planification de trajectoire pour les systèmes non-holonomes

Nous considérons un système non-holonome de la forme

$$(\Sigma) \quad \dot{q}(t) = F_1(q(t))u_1(t) + F_2(q(t))u_2(t), \quad q \in M \quad \text{et} \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

- M est une variété lisse de dimension $n > 2$;
- F_1 et F_2 sont des champs de vecteurs lisses qui engendrent une distribution de dimension 2 sur M , notée Δ .

Le drapeau associé à (Σ) est la suite de sous-espaces vectoriels Δ^i , pour $i \in \mathbb{N}^*$ définis par¹ $\Delta^{i+1} = \Delta^i + [\Delta, \Delta^i]$ et $\Delta^1 = \Delta$. Nous supposons que F_1 et F_2 satisfont la *condition de Chow*² [Jea14], il existe donc un plus petit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Delta^r = T_q M$ pour tout q . Pour un système (Σ) donné, les dimensions des espaces Δ^i successifs caractérisent le drapeau, et nous nous intéressons plus particulièrement aux systèmes non-holonomes pour lesquels r ainsi que le type de drapeau sont constants pour tout $q \in M$.

Soient q et \bar{q} deux éléments appartenant à la même composante connexe de M , le *théorème de Chow* nous garanti l'existence de trajectoires de (Σ) joignant q à \bar{q} . Nous définissons la longueur d'une trajectoire $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ de (Σ) comme étant

$$l(\gamma) = \int_0^T \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)} d\tau$$

La *distance sous-riemannienne* entre q et \bar{q} , notée $d(q, \bar{q})$, est la longueur de la plus petite trajectoire de (Σ) joignant q à \bar{q} .

Un *problème de planification de trajectoire* est la donnée d'un chemin lisse non-admissible $\Gamma : [0, T] \rightarrow M$ que l'on cherche à approcher par une trajectoire de (Σ) . Dans le cas particulier de l'étude présentée ici, le chemin Γ sera *fortement non-admissible*, c'est-à-dire que $\dot{\Gamma}(t) \in \Delta^r$ et $\dot{\Gamma}(t) \notin \Delta^{r-1}$ pour presque tout $t \in [0, T]$. Cette tâche sera accomplie au sens de l'entropie d'interpolation, quantité inspirée par la notion de complexité métrique — c.f. [Jea01 ; Jea03 ; GZ06]. Pour un petit paramètre $\varepsilon > 0$ fixé, nous définissons le tube et le cylindre sous-riemanniens \mathcal{T}_ε et \mathcal{C}_ε :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\varepsilon &= \{q \in M \mid d(q, \Gamma) \leq \varepsilon\} \\ \mathcal{C}_\varepsilon &= \{q \in M \mid d(q, \Gamma) = \varepsilon\} \end{aligned}$$

La *complexité métrique* est définie comme étant $\frac{1}{\varepsilon}$ fois la longueur de la plus petite trajectoire de (Σ) joignant $\Gamma(0)$ à $\Gamma(T)$ tout en restant dans le tube \mathcal{T}_ε .

L'*entropie d'interpolation* est quant-à-elle définie comme étant $\frac{1}{\varepsilon}$ fois la longueur de la plus petite trajectoire de (Σ) joignant $\Gamma(0)$ à $\Gamma(T)$ sous la contrainte "tout morceau de trajectoire de longueur supérieure ou égale à ε contient un point de Γ ".

1. $[\Delta, \Delta^i] = \text{Vect}([F, G] \mid F \in \Delta \text{ et } G \in \Delta^i)$.
2. Ou *Lie Algebra Rank Condition*.

Le problème consistant à réaliser l'entropie d'interpolation est formalisé en un problème de contrôle optimal. Plus précisément, la synthèse optimale sera faite sur l'*approximation nilpotente* de (Σ) , qui subira ensuite une *modification d'ordre ε* . L'approche dans laquelle cette contribution s'inscrit propose de travailler au voisinage de la courbe Γ , dans un système de coordonnées dites *normales*. Dans ce système de coordonnées, la courbe Γ est rectifiée en une ligne droite donnée par la dernière coordonnée tandis que la distribution Δ est le plan horizontal engendré par des deux premières coordonnées.

La suite de ce chapitre est décomposée en trois parties. La première présente succinctement les principales étapes menant à la détermination de l'approximation nilpotente de (Σ) le long de Γ . La seconde propose une résolution du problème de contrôle optimal l'aide du principe du maximum de Pontryagin [Pon+62]. La dernière section compile divers commentaires portant sur cette problématique.

2.1 La boule roulant sur un plan et tirant une remorque

Nous allons maintenant considérer le système académique pour lequel les résultats de [BG13a; BG13b] ont été établis. La *boule roulant (sans glissement) sur un plan et tirant une remorque* est une extension du problème de la *boule roulant sur un plan* — cf. [Blo+03; BD93; Jur93]. Ce système, schématisé à la figure 2.1 est décrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \\ \dot{y} = u_2 \\ \dot{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_2 \\ -u_1 & -u_2 & 0 \end{bmatrix} R \\ \dot{\theta} = -\frac{1}{L}(\cos(\theta)u_1 + \sin(\theta)u_2) \end{cases} \quad (2.1)$$

- (x, y) est la position du point de contact entre la boule et le plan;
- $R \in SO(3, \mathbb{R})$ est l'orientation du repère de référence attaché au centre de la boule;
- l'angle θ décrit la position de la remorque par rapport à la boule — la longueur de la liaison rigide boule-remorque est notée L .

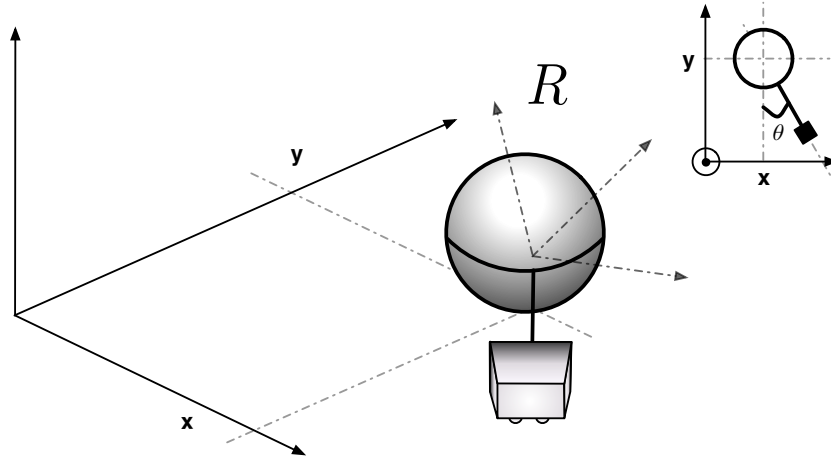


FIGURE 2.1 – Système de la boule roulant sur un plan, tirant une remorque.

Sous la forme (Σ) , les champs de vecteurs $F_1(q)$ et $F_2(q)$ de ce système sont

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial}{\partial x} + A_1 - \frac{1}{L} \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_2 &= \frac{\partial}{\partial y} + A_2 - \frac{1}{L} \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

où $q \in \mathbb{R}^2 \times SO(3, \mathbb{R}) \times S^1$ et les règles de calcul³ pour les champs de vecteurs A_1, A_2 et A_3 sur $SO(3, \mathbb{R})$ sont $[A_1, A_2] = A_3, [A_1, A_3] = -A_2$, et $[A_2, A_3] = A_1$. Le calcul de l'algèbre de Lie engendrée par F_1 et F_2 fait apparaître un drapeau est de la forme $(2, 3, 5, 6)$.

Soit Γ un chemin lisse fortement non-admissible sur M . Tout d'abord, puisque l'ensemble du problème est local, M pourra être identifiée à \mathbb{R}^6 au voisinage de Γ . Nous allons procéder par étapes (trois) dans le but d'établir une *forme normale* générique pour les systèmes de type $(2, 3, 5, 6)$. Une quatrième et dernière étape spécifique au système *boule-remorque* nous permettra d'aboutir à une forme normale que nous exploitons dans la section 2.2.

La première étape consiste à choisir une surface paramétrée de dimension 4, notée S , transversale à Δ :

$$S = \{q(s_1, s_2, s_3, t) \in \mathbb{R}^6\}, \text{ avec } q(0, 0, 0, t) = \Gamma(t). \quad (2.2)$$

Comme l'objectif est de rester ε -proche de la courbe Γ , S peut se limiter à un germe de surface au voisinage de Γ .

La seconde étape exploite le lemme ci-dessous, que l'on retrouve dans [ACG98; AG01; GZ06; GZ07], pour construire un système de coordonnées normales.

Lemme 5. (*Coordonnées normales associées à S*). Il existe des applications $x : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2, y : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3, w : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\xi = (x, y, w)$ est un système de coordonnées défini sur un voisinage de S dans \mathbb{R}^6 tel que :

1. $S(y, w) = (0, y, w), \Gamma = \{(0, 0, w)\}$;
2. la restriction $\Delta|_S = \ker dw \cap_{i=1, \dots, 3} \ker dy_i$, la métrique $g|_S = (dx_1)^2 + (dx_2)^2$;
3. $C_\varepsilon^S = \{\xi | x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon^2\}$, où C_ε^S désigne le cylindre de rayon ε autour de S ;
4. les géodésiques⁴ du principe du maximum de Pontryagin réalisant les conditions de transversalité par rapport à S sont les droites traversant S contenues dans les plans $P_{y_0, w_0} = \{\xi | (y, w) = (y_0, w_0)\}$. Elles sont donc orthogonales à S .

Ces coordonnées normales sont uniques à un changement de coordonnées près de la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= T(y, w)x \\ (\tilde{y}, \tilde{w}) &= (y, w) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $T(y, w) \in O(p)$, le groupe orthogonal de dimension p .

La troisième étape consiste à opérer une série de changements de paramétrisation de la surface S , sur le tube \mathcal{T}_ε , tout en conservant la rectification de $\Gamma(t) = (0, \dots, 0, w)$ et le fait que les coordonnées soient normales.

Théorème 3. (*Forme normale dans le cas générique 6-2.*) Il existe un changement de coordonnées sur le tube \mathcal{T}_ε de sorte à ce que le système (2.1) puisse être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 + O(\varepsilon^3) \\ \dot{x}_2 = u_2 + O(\varepsilon^3) \\ \dot{y} = \left(\frac{x_2}{2}u_1 - \frac{x_1}{2}u_2\right) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{z}_1 = x_2\left(\frac{x_2}{2}u_1 - \frac{x_1}{2}u_2\right) + O(\varepsilon^3) \\ \dot{z}_2 = x_1\left(\frac{x_2}{2}u_1 - \frac{x_1}{2}u_2\right) + O(\varepsilon^3) \\ \dot{w} = Q_w(x_1, x_2)\left(\frac{x_2}{2}u_1 - \frac{x_1}{2}u_2\right) + O(\varepsilon^4) \end{cases} \quad (2.4)$$

où $Q_w(x_1, x_2)$ est une forme quadratique en (x_1, x_2) dépendant de w de manière lisse.

3. Le long de cette étude, le calcul des crochets de Lie a été effectué "en commençant par la gauche".
4. Pour le problème consistant à minimiser la longueur entre deux points au voisinage de Γ .

A la suite de ce théorème, et comme cela est habituellement fait en planification de trajectoire pour les systèmes non-holonomes [Jea14], les coordonnées x_1 et x_2 sont dites de poids 1, y est de poids 2, z_1 and z_2 sont de poids 3, et enfin w est de poids 4. Ainsi, les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}$ sont de poids -1 , $\frac{\partial}{\partial y}$ est de poids -2 (et ainsi de suite).

Définition 1. 1. L'approximation nilpotente du système cinématique (2.4) est établie en ne conservant que les termes de poids -1 — voir le système (2.6).

2. Etant donné une famille à un paramètre de courbes admissibles (absolument continues et paramétrées par longueur d'arc) $\gamma_\varepsilon : [0, T_{\gamma_\varepsilon}] \rightarrow \mathbb{R}^6$, une modification d'ordre ε de γ_ε est une famille de courbes admissibles (absolument continues et paramétrées par longueur d'arc) notée $\tilde{\gamma}_\varepsilon : [0, T_{\tilde{\gamma}_\varepsilon}] \rightarrow \mathbb{R}^6$ telle que pour tout ε et pour un certain $\alpha > 0$, si $[0, T_{\gamma_\varepsilon}]$ est divisé en sous-intervalles de longueur ε (i.e. $[0, \varepsilon]$, $[\varepsilon, 2\varepsilon]$, $[2\varepsilon, 3\varepsilon]$, ...), alors :

- (a) $[0, T_{\tilde{\gamma}_\varepsilon}]$ est elle-même divisé en intervalles correspondants, $[0, \varepsilon_1]$, $[\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2]$, $[\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3]$, ... où $\varepsilon \leq \varepsilon_i < \varepsilon(1 + \varepsilon^\alpha)$, $i = 1, 2, \dots$,
- (b) pour chaque couple composé d'un intervalle $I_1 = [\tilde{\varepsilon}_i, \tilde{\varepsilon}_i + \varepsilon]$, (avec $\tilde{\varepsilon}_0 = 0$, $\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1$, $\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, ...) et de l'intervalle correspondant $I_2 = [i\varepsilon, (i+1)\varepsilon]$, $\frac{d}{dt}(\tilde{\gamma})$ et $\frac{d}{dt}(\gamma)$ coïncident sur I_2 , i.e. :

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\gamma})(\tilde{\varepsilon}_i + t) = \frac{d}{dt}(\gamma)(i\varepsilon + t), \text{ pour presque tout } t \in [i\varepsilon, (i+1)\varepsilon]$$

Le théorème suivant, que l'on trouve dans [GZ06] précise l'intérêt de l'utilisation de l'approximation nilpotente dans le but de réaliser l'entropie d'interpolation.

Théorème 4. Etant donné un système cinématique dont le drapeau est de la forme (2, 3, 5, 6), sans singularité. Une synthèse optimale asymptotique (vis-à-vis de l'entropie) pour le système (2.4) est obtenue sous la forme d'une modification d'ordre ε de la synthèse optimale asymptotique réalisée pour son approximation nilpotente. Ainsi, l'entropie $E(\varepsilon)$ de (2.4) est la même que l'entropie de $\hat{E}(\varepsilon)$ de l'approximation nilpotente.

La dernière étape est une simplification du modèle, dans le cas du système boule - remorque, reposant sur l'analyse des invariants du problème. Le lemme suivant présente les éléments permettant de spécifier la forme quadratique $Q_w(x_1, x_2)$ du système (2.4), et par la suite, de résoudre le problème de contrôle optimale de la section suivante.

Lemme 6. 1. L'invariant $r(\Gamma(t))$ du problème composé du système (2.1) et de la courbe Γ est le même que l'invariant de son approximation nilpotente le long de Γ ;

2. Le rapport $r(\xi)$ des valeurs propres (réelles) de $Q_w(x_1, x_2)$ est un invariant du problème ;

3. Dans le cas du système boule - remorque, ce rapport est $r(\xi) = 1$.

Le système (2.1) est donc réduit à son approximation nilpotente le long de Γ à l'aide du théorème 4. Puis, en s'appuyant sur le lemme 6, nous pouvons considérer que

$$Q_w(x_1, x_2) = \delta(w) \left((x_1)^2 + (x_2)^2 \right) \quad (2.5)$$

où $\delta(w)$ est le principal invariant du problème de planification. Il s'agit en fait du seul invariant de l'approximation nilpotente le long de Γ . Une reparamétrisation de Γ en fixant $dw = \frac{dw}{4\delta(w)}$, nous permet de fixer $\delta(w) = 1/4$. Dans la suite, nous considérerons le système ci-dessous dont les champs de vecteurs seront notés F et G .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{y} = \left(\frac{x_2}{2}u_1 - \frac{x_1}{2}u_2\right) \\ \dot{z}_1 = x_2 \left(\frac{x_2}{2}u_1 - \frac{x_1}{2}u_2\right) \\ \dot{z}_2 = x_1 \left(\frac{x_2}{2}u_1 - \frac{x_1}{2}u_2\right) \\ \dot{w} = \frac{1}{4} \left(x_1^2 + x_2^2\right) \left(\frac{x_2}{2}u_1 - \frac{x_1}{2}u_2\right) \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2 Synthèse optimale

Nous cherchons à réaliser l'entropie d'interpolation en maximisant $\int \dot{w} dt$ en un temps fixé ε . Les conditions d'interpolation prennent la forme suivante :

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad x(\varepsilon) = 0, \quad y(\varepsilon) = 0, \quad z(\varepsilon) = 0.$$

Lemme 7. Soit $\zeta = (x, y, z, w) = (\zeta, w)$. Les trajectoires de (2.6) qui maximisent $\int \dot{w} dt$ en temps fixé ε , sous les conditions d'interpolation $\zeta(0) = \zeta(\varepsilon) = 0$, ont une projection périodique sur ζ (i.e. $\zeta(t)$ est lisse et périodique de période égale à ε).

La trajectoire optimale que nous recherchons doit aussi minimiser la longueur de la courbe, c'est-à-dire la fonctionnelle

$$\int_0^\varepsilon \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} dt$$

ou, de manière équivalente en temps fixe⁵, l'énergie

$$\frac{1}{2} \int_0^\varepsilon u_1^2(t) + u_2^2(t) dt$$

Les trajectoires anormales ne répondent pas aux conditions d'interpolation, et seul l'hamiltonien normal est à étudier :

$$\mathcal{H} = PFu_1 + PGu_2 - \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2)$$

- $P = (p_1, \dots, p_6)$ est le vecteur adjoint ;
- la condition de maximisation de l'hamiltonien le long des trajectoires extrémales entraîne $PF = u_1$, and $PG = u_2$.

L'hamiltonien maximisé est donc $\mathcal{H} = \frac{1}{2} ((PF)^2 + (PG)^2)$ et comme il ne dépend pas des variables y, z, w , alors p_3, p_4, p_5 , et p_6 sont des constantes. De plus, dans la suite, nous considérerons l'ensemble de niveau $H = \frac{1}{2}$.

Soit un angle φ tel que $PF = \sin(\varphi)$, et $PG = \cos(\varphi)$. En dérivant ces expressions par rapport au temps, nous dégageons les relations :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= P[F, G] \\ \ddot{\varphi} &= -P[F, [F, G]] \times PF - P[G, [F, G]] \times PG \end{aligned}$$

En posant $\lambda = -P[F, [F, G]]$ et $\mu = -P[G, [F, G]]$, la dérivée seconde de φ s'écrit :

$$\ddot{\varphi} = \lambda \sin(\varphi) + \mu \cos(\varphi) \quad (2.7)$$

5. i.e. le lemme 3.64 de [ABB20].

Enfin, le calcul de $\dot{\lambda}$ and $\dot{\mu}$ nous permet d'aboutir à un système d'équations fermé :

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= P [F, [F, [F, G]]] \times PF + P [G, [F, [F, G]]] \times PG \\ \dot{\mu} &= P [F, [G, [F, G]]] \times PF + P [G, [G, [F, G]]] \times PG\end{aligned}$$

En effet, les différents crochets de Lie impliqués dans le calcul sont les suivants⁶ :

$$\begin{aligned}[F, [F, G]] &= -\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial z_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \\ [G, [F, G]] &= -\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial z_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \\ [F, [F, [F, G]]] &= \frac{\partial}{\partial \omega} \\ [G, [G, [F, G]]] &= \frac{\partial}{\partial \omega} \\ [G, [F, [F, G]]] &= [F, [G, [F, G]]] = 0\end{aligned}$$

Les expressions de λ , μ et de leurs dérivées sont donc :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{3}{2} p_5 + p_6 x_1 & \dot{\lambda} &= p_6 \sin(\varphi) \\ \mu &= \frac{3}{2} p_4 + p_6 x_2 & \dot{\mu} &= p_6 \cos(\varphi)\end{aligned}$$

Remplacer $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$ dans (2.7) permet d'écrire $\ddot{\varphi} = \frac{\lambda \dot{\lambda}}{p_6} + \frac{\mu \dot{\mu}}{p_6}$, et ainsi d'exprimer $\dot{\varphi}$ en fonction de λ et μ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(\varphi) \\ \dot{x}_2 = \cos(\varphi) \\ \dot{\varphi} = K + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2p_6} \\ \dot{\lambda} = p_6 \sin(\varphi) \\ \dot{\mu} = p_6 \cos(\varphi) \end{cases} \quad (2.8)$$

Finalement, la constante p_6 peut-être normalisée à 1 à l'aide d'un changement de variables et une reparamétrisation du temps.

Le calcul de la courbure de la courbe plane $(\lambda(t), \mu(t))$ montre qu'il s'agit d'une fonction quadratique de la distance à l'origine.

Lemme 8. *Etant donné une courbe plane $(\lambda(t), \mu(t))$, dont la courbure est une fonction de la distance à l'origine :*

$$\dot{\lambda} = \cos(\varphi), \quad \dot{\mu} = \sin(\varphi), \quad \dot{\varphi} = k(\lambda^2 + \mu^2), \quad (2.9)$$

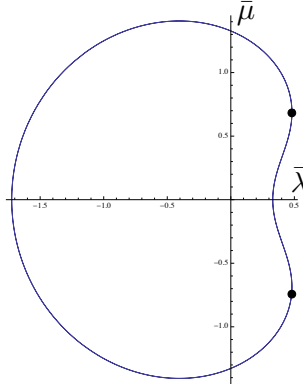
pour une certaine fonction lisse $k(\cdot)$. Alors, ce système est intégrable.

Cette propriété, qui semble spécifique⁷ au problème *boule - remorque*, nous permet d'élaborer un schéma numérique permettant d'aboutir à une forme de résolution du problème. Pour cela, nous considérons le système réduit :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \sin(\varphi) \\ \dot{\mu} = \cos(\varphi) \\ \dot{\varphi} = K + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} \end{cases} \quad (2.10)$$

6. Le long de cette étude, le calcul des crochets de Lie a été effectué en "commençant par la gauche".

7. Par opposition au cas (2,3,5,6) général.

FIGURE 2.2 – Graphe de h_q dans les cas (a) $K < 0$, et (b) $K > 0$.FIGURE 2.3 – Trajectoire $\bar{\Lambda}$ de type II.

Nous opérons ensuite le changement de repère :

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}(t) &= \cos(\varphi(t))\lambda(t) - \sin(\varphi(t))\mu(t) \\ \bar{\mu}(t) &= \sin(\varphi(t))\lambda(t) + \cos(\varphi(t))\mu(t)\end{aligned}$$

Ce dernier envoie la courbe $\Lambda = (\lambda, \mu)$ sur $\bar{\Lambda} = (\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ dont les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\lambda}} &= -\bar{\mu}\dot{\varphi} \\ \dot{\bar{\mu}} &= 1 + \bar{\lambda}\dot{\varphi}\end{aligned}\tag{2.11}$$

La courbe $\bar{\Lambda}$ est une trajectoire de l'hamiltonien suivant

$$H = \bar{\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\lambda}^2 + \bar{\mu}^2}{2} + K \right)^2\tag{2.12}$$

où K est le même qu'en (2.10). Les courbes intégrales s'interprètent ainsi comme les intersections du graphe de la quartique $h_q(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\lambda}^2 + \bar{\mu}^2}{2} + K \right)^2$, représenté à la figure 2.2, avec le plan $\mathcal{P}_c = \{(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, z) | c - \bar{\lambda} = z\}$ pour un jeu de paramètres c et K . Les courbes intégrales se présentent donc soit comme des courbes fermées convexes (on dira alors que la courbe est de type I), soit comme des courbes de la forme montrée à la figure 2.3 (que l'on dira de type II). Dans les deux cas, la courbe $\bar{\Lambda}$ est symétrique par rapport à l'axe $\bar{\lambda}$.

Supposons ensuite que $\varphi_0 = 0$ et $\mu_0 = 0$ de telle sorte que les courbes Λ solutions du système d'équations (2.10) puissent être considérées comme étant symétriques⁸ par rapport à l'axe λ . En effet, cette hypothèse n'affecte pas le système (2.11) et l'analyse exploitant l'hamiltonien (2.12) reste pertinente. Remarquons que pour tout $\varphi_0 \neq 0$, la trajectoire solution de (2.10) est une rotation de celle obtenue pour $\varphi_0 = 0$.

Lemme 9. La période P_Λ de Λ , est un multiple entier de la période $P_{\bar{\Lambda}}$ de $\bar{\Lambda}$: il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $P_\Lambda = nP_{\bar{\Lambda}}$. Si P_X désigne la période de X , alors $P_X = P_\Lambda$.

8. Ce que l'on peut voir à l'aide du changement de variables $\bar{\mu} = -\mu$, $\bar{\varphi} = -\varphi$, et $\bar{t} = -t$.

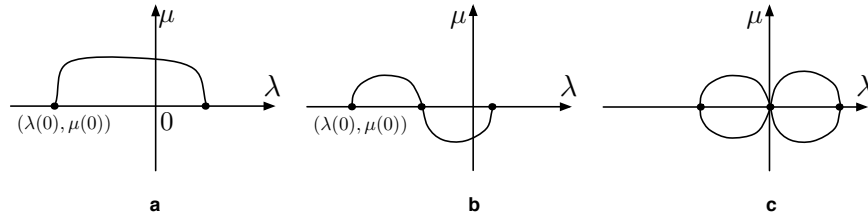


FIGURE 2.4 – Formes possibles de la trajectoire Λ associée à une trajectoire $\bar{\Lambda}$ de type II.

L'étape suivante consiste à travailler sur le nombre de périodes $P_{\bar{\Lambda}}$ nécessaires pour réaliser les conditions d'interpolation. **Supposons que n soit égal à 1**, c'est-à-dire, que $P_X = P_\lambda = P_{\bar{\lambda}}$. Nous allons voir que ceci ne nous permet pas de réaliser les conditions d'interpolation. La solution sera ensuite recherchée à l'aide d'un schéma numérique. Comme les courbes Λ and $\bar{\Lambda}$ sont périodiques et symétriques, nous n'allons étudier que des demi-périodes de $P_{\bar{\lambda}}$, en commençant par le point $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = (-a, 0)$, $a > 0$. Soit $S(t)$ l'aire balayée par la courbe Λ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} \right) = \bar{\mu}(t) \quad \text{et} \quad S(t) = \int_0^t \bar{\lambda}(\tau) d\tau$$

Par conséquent la distance entre un point de la courbe Λ et l'origine est monotone sur la demi-période considérée, cf. figure 2.3. Remarquons aussi que les points d'inflexion de Λ correspondent aux "bosses" de la courbe $\bar{\Lambda}$ indiquées par des points sur la figure 2.3.

Lemme 10. *Conséquence des conditions d'interpolation $y(\varepsilon) = 0$, $z_1(\varepsilon) = 0$ et $z_2(\varepsilon) = 0$, l'aire de la courbe fermée X ainsi que les moments d'ordre 2 s'annulent :*

$$\int_{\Gamma} x_2 dx_1 - x_1 dx_2 = 0, \quad \int_{\Gamma} x_1(x_2 dx_1 - x_1 dx_2), \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} x_2(x_2 dx_1 - x_1 dx_2) = 0$$

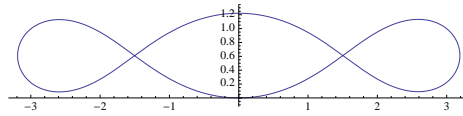
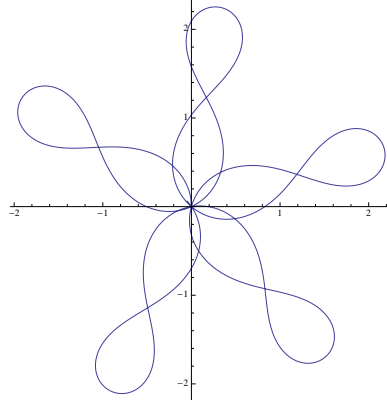
Ceci reste vrai pour toute translation de X . En particulier, l'aire et les moments d'ordre 2 de la courbe Λ s'annulent aussi.

Si la courbe $\bar{\Lambda}$ est de type I, Λ ne présente pas de point d'inflexion et l'aire totale balayée par λ ne peut pas être égale à 0. Une courbe de type I ne peut donc pas réaliser les conditions d'interpolation — ceci est illustré à la figure 2.4(a).

Si la courbe $\bar{\Lambda}$ est de type II, il n'y a qu'un seul point d'inflexion sur une demi-période. La situation est schématisée à la figure 2.4(b), et la courbe Λ complète présente la forme d'un huit. Il s'ensuit que le moment $m_\lambda = \int_{\Lambda} \dot{S} \lambda d\tau$ ne peut pas être égal à 0. En effet, si l'on translate le point central de la figure huit sur l'origine, comme cela est montré dans la figure 2.4(c), $\dot{S} < 0$ lorsque $\lambda < 0$, et $\dot{S} > 0$ lorsque $\lambda > 0$. Une courbe de type II ne peut donc pas réaliser les conditions d'interpolation.

En conclusion, n doit-être supérieur à 1.

Pour un $n > 1$ fixé, il sera toujours possible, à l'aide d'un schéma numérique, de trouver une courbe périodique dont les moments s'annulent. La plus petite d'entre elles correspond à $n = 2$, et est montrée à la figure 2.5 dans les coordonnées (x_1, x_2) . Un exemple de trajectoire périodique pour $n = 5$ est montré à la figure 2.6.

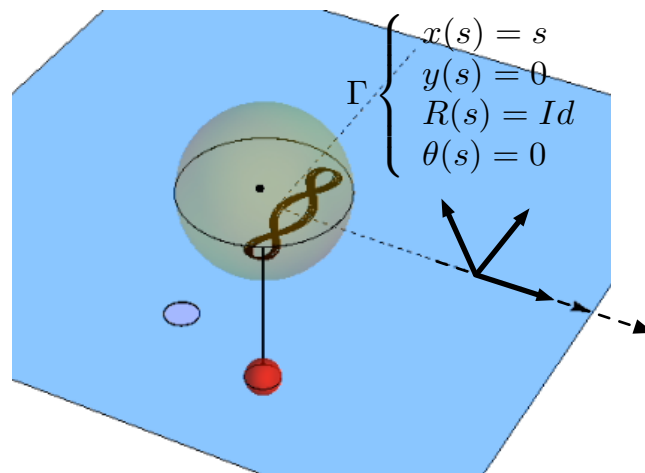
FIGURE 2.5 – Projection de la solution pour $n=2$ dans le plan (x_1, x_2) .FIGURE 2.6 – Projection de la solution pour $n=5$ dans le plan (x_1, x_2) .

2.3 Conclusion

Un exemple d'approximation d'ordre ε de la synthèse optimale de la figure 2.5 consiste en l'interpolation de la courbe⁹

$$\Gamma(t) = (x(t) = t, y(t) = 0, R(t) = Id, \theta(t) = 0)$$

Le résultat est représenté à la figure 2.7. Remarquons que si $\theta(t) = 0$ est remplacé par $\theta(t) = -\pi/2$ (la remorque est tirée dans le sillage de la boule), alors $\tilde{\Gamma} \in \Delta^3$ et la solution correspond à celle du problème (2,3,5) — voir ci-dessous.



FIGURE 2.7 – Le problème du parking adapté au système de la *boule tirant une remorque* (le chariot est schématisé par la boule rouge).

Cette contribution s'inscrit dans une théorie plus vaste de la planification du mouvement pour les systèmes non-holonomes. En particulier, le problème à deux contrôles avait été abordé dans les travaux [GFPRM04; GZ05a; GZ05b; GZ05c; GZ06]. Il en ressort que les projections des courbes optimales sur le plan (x_1, x_2) des coordonnées normales sont :

- des courbes périodiques de courbure constante, soit des cercles (\odot), dans le cas d'un drapeau de type¹⁰ (2,3);

9. Les notations et coordonnées sont celles du système d'équations 2.1.

10. dont l'exemple typique est l'unicycle.

- des courbes périodiques dont la courbure est une fonction linéaire des coordonnées, soit la seule élastica périodique () , dans les cas d'un drapeau de type ¹¹ (2, 3, 4) et d'un drapeau de type ¹² (2, 3, 5) ;
- des courbes périodiques dont la courbure est une fonction quadratique de la position () , dans le cas abordé dans ce chapitre, correspondant à un drapeau de type (2, 3, 5, 6).

Le dernier résultat n'a toutefois été obtenu que pour le système de la *boule tirant une remorque*, qui ne correspond pas au cas (2, 3, 5, 6) générique. Se pose alors la question de savoir si ce résultat correspond aussi au cas 6 – 2 générique, cf. théorème (3). Ce schéma s'applique-t-il aussi aux autres systèmes non-holonomes réguliers tels que $\Delta^4 = TM$, c'est-à-dire pour les drapeaux de type (2, 3, 5, 7) et (2, 3, 5, 8) ?

Enfin, l'ensemble des résultats ci-dessus font penser au début d'une série menant à l'hypothèse comme quoi, pour la classe de systèmes considérés, le nombre de "boucles" de la courbe (x_1, x_2) est égale à $r - 1$ pour un système ¹³ tel que $\Delta^r = TM$. Cependant, le faible nombre de cas effectivement traités ainsi que le travail ¹⁴ plus récent [GMP15] amènent à douter de la solidité de cette intuition.

11. dont l'exemple typique est la voiture tirant une remorque

12. dont l'exemple typique est la boule roulant sur un plan

13. Rappel : $\Delta^1 = Vect(F_1, F_2)$.

14. Les auteurs montrent que l'hypothèse est vérifiée dans le cas des *distributions de Goursat* — i.e. pour un système de dimension n , le drapeau est de type (2, 3, 4, 5, ..., n).

Chapitre 3

Un observateur non-linéaire pour les systèmes à mesures asynchrones

Dans ce chapitre, nous présentons les principaux résultats obtenus dans le cadre de la synthèse d'observateurs pour les systèmes non-linéaires asynchrones¹. Le terme asynchrone est utilisé ici pour désigner des systèmes de contrôle à sorties multiples dont les différentes composantes du vecteur de sortie ne sont pas systématiquement disponibles en même temps.

Cette étude trouve sa motivation dans les travaux [SB14; SBB10] où le filtre de Kalman à grand-gain adaptatif [Boi10] a été appliqué à des signaux qui n'étaient pas issus de systèmes simulés. Des questions concernant la prise en compte, sur le plan théorique, d'un ensemble de capteurs présentant un échantillonnage hétérogène et désynchronisé avaient alors émergé : *l'observabilité est-elle conservée ? dans quelle mesure peut-on garantir la convergence d'un observateur pour de tels systèmes ?*

Les travaux discutés dans ce chapitre répondent à certaines d'entre elles.

Tout d'abord, et ce afin de détailler plus avant l'intérêt de cette problématique, nous reproduisons ci-dessous un exemple que l'on trouve dans la thèse [Seb10].

Exemple 1. *Considérons le cercle unité $\Pi = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a^2 + b^2 = 1\}$, l'ensemble $M = \Pi \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ et le système (Σ) , défini sur M , comme suit :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 x_4 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_4 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 x_3 \\ y_2 = x_2 x_3 \\ y_3 = x_4 \end{cases} \quad (\Sigma)$$

où $x_3(0) > 0$ et $x_4(0) > 0$.

1. *Que ce soit dans le cadre continu ou discret, le système (Σ) est observable. En particulier,*

$$y_1^2 + y_2^2 = x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) = x_3^2$$

nous permet de calculer x_3 . Ainsi, y_1 et y_2 sont suffisants pour calculer x_1 et x_2 .

2. *Si (Σ) est vu comme un système asynchrone, alors il devient non-observable puisque certaines valeurs de $x_4(0)$ rendent x_3 indistinguable. En effet, si l'on suppose que y_1 et y_2 sont mesurés alternativement avec une période d'échantillonnage homogène notée Δt . Alors, l'état de (Σ) est de la forme :*

1. Dans la littérature, on trouvera aussi la dénomination *multi-rate systems*.

$$\begin{cases} x_1 = \cos(x_4 t + C_1) \\ x_2 = \sin(x_4 t + C_1) \\ x_3 = C_2 \\ x_4 = C_3 \end{cases}$$

Si la période d'échantillonnage est choisie telle que $x_4(0)\Delta t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors :

$$\begin{cases} y_1(0) = x_3 \cos(C_1) \\ y_2(\Delta t) = x_3 \cos(C_1) \\ y_1(2\Delta t) = -x_3 \cos(C_1) \\ y_2(3\Delta t) = -x_3 \cos(C_1) \\ \vdots \end{cases}$$

Dans ce cas, il est impossible de distinguer x_3 de C_1 .

Ce sujet des systèmes asynchrones a bien sûr été soulevé dans la littérature comme le démontre bien le travail de revue [JBA18]. Nous retrouvons cette problématique dans les systèmes de positionnement global (GNSS, GPS) [MK98], de contrôle de drones [Bri+10], de robotique sous-marine [Bar+15; MCC15; BLH03], d'ingénierie chimique ou agronomique [TSO99; BPJ08].

L'estimation de l'état d'un tel système peut-être abordée en considérant l'une des trois stratégies suivantes :

1. modéliser la dynamique dans le cadre discret et utiliser ou adapter un estimateur pour systèmes discrets — c'est, par exemple, ce qui est utilisé dans [BPJ08] pour les systèmes linéaires ;
2. plonger les mesures depuis l'espace des suites vers l'espace des fonctions continues, puis utiliser un estimateur à mesures synchrones — dans le cadre non-linéaire, [TSO99] repose sur l'utilisation de l'interpolation polynomiale ;
3. prendre en compte l'aspect hybride du modèle : la dynamique continue de l'état d'une part et l'aspect discret des mesures de l'autre.

Le travail présenté ici suit la troisième stratégie.

Dans le rôle de l'observateur non-linéaire, on retrouvera le *filtre de Kalman grand-gain* dans sa version *classique* [GHO92; Dez+92]. Nous proposons tout d'abord une définition d'un système de contrôle à mesures asynchrones, en Section 3.2. D'une certaine manière, il s'agit de la pierre angulaire de ce travail qui nous permet ensuite de proposer un observateur grand-gain adapté. Nous citons ensuite le théorème de convergence obtenu dans ce cadre, puis, prolongeons le chapitre avec la Section 3.4 qui consiste en une discussion autour de la preuve de convergence. Un exemple illustratif succinct est donné en section 3.5 et clôt le chapitre.

3.1 Notations

Quelques notations spécifiques seront utilisées dans ce chapitre, nous les rappelons ci-dessous.

- Une **subdivision du temps** désigne une suite de réels $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante où $\tau_0 = 0$.
- Id désigne une matrice identité de dimension appropriée, $diag[v]$ est une matrice diagonale dont les éléments sont les composantes de v . Il pourra s'agir d'un vecteur ou d'un ensemble de matrices. Dans ce dernier cas, $diag[v]$ sera alors une matrice diagonale par blocs.
- $|\Omega|$ est le cardinal de l'ensemble Ω .

- La variable $x(\tau)$ évaluée au temps τ_k sera notée $x_k = x(\tau_k)$. Lors de l'étape de correction effectuée à l'instant τ_k , $x(\tau_k)$ sera notée $x_k^{(-)}$ avant la correction et $x_k^{(+)}$ après.
- Au temps τ_k , un produit de plusieurs variables dépendant du temps de la forme : $x'(\tau)S(\tau)x(\tau)$ sera abrégé $(x'Sx)_k^{(-)}$.
- L'état estimé sera noté $z(t)$. Les notations $z_k^{(-)}$ et $z_k^{(+)}$ fonctionnent comme expliqué ci-dessus.

3.2 Vers une forme normale asynchrone

Soit (Σ_c) un système dynamique de contrôle non-linéaire, continu, exprimé sous la forme normale d'observabilité détaillée ci-dessous² — voir par exemple [Far+11; GK01; SB14].

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b(x(t), u(t)) & \text{avec } x(0) = x_0 \in \chi \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\Sigma_c)$$

La variable d'état de ce système, $x(t)$, est supposée appartenir à un sous-ensemble compact de $\chi \subset \mathbb{R}^n$, la variable de sortie $y(t)$ appartient à \mathbb{R}^{n_y} et la variable de contrôle $u(t) \in \mathcal{U}_{adm} \subset \mathbb{R}^{n_u}$, pour tout temps t .

Le champ de vecteur $b(x, u)$ est supposé C^1 , à support compact, et la matrice Jacobienne (respectivement à x), notée $D_x b(x, u)$, est bornée supérieurement par une constante $L_b > 0$ — i.e. $\|D_x b(x, u)\| \leq L_b$. Ainsi, $b(x, u)$ est Lipschitz par rapport à x , uniformément par rapport à u :

$$\|b(x, u) - b(z, u)\| \leq L_b \|x - z\|$$

La variable d'état est décomposée en n_y sous-vecteurs, chacun d'entre eux étant associé à l'une des composantes de la sortie. Autrement dit, $x(t)$ est de la forme :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n_y}(t) \end{pmatrix}$$

et pour $i \in \{1, \dots, n_y\}$, chaque sous-vecteur $x_i(t)$ est associé à la composante $y^i(t)$ du vecteur des sorties. La dimension d'un sous-vecteur x_i est notée n_i , et la somme de tous les entiers n_i vaut exactement n . Enfin, le sous-vecteur $x_i(t)$ est écrit :

$$x_i(t) = \begin{pmatrix} x_i^1(t) \\ \vdots \\ x_i^{n_i}(t) \end{pmatrix}$$

La dynamique qui lui est associée est

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + b_i(x(t), u(t)) \\ y^i(t) = C^i x_i(t) \end{cases}$$

où

- A_i and C^i sont des matrices ($n_i \times n_i$) et ($1 \times n_i$), respectivement, de la forme :

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^i = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0).$$

2. Il s'agit d'une version simplifiée de la forme normale utilisée dans [Fed+20] dans la mesure où les matrices A et C sont indépendantes de la variable d'entrée et du temps. Cette dépendance peut, bien sûr, être ré-introduite au prix de quelques conditions supplémentaires.

- $b_i(x, u)$ est quant-à lui un champ de vecteurs présentant une dépendance triangulaire par rapport à la variable $x_i(t)$ et dont la dernière composante peut dépendre de tout l'état de (Σ_c) , à savoir :

$$b_i(x, u) = \begin{pmatrix} b_i^1(x_i^1, u) \\ b_i^2(x_i^1, x_i^2, u) \\ \vdots \\ b_i^{n_i-1}(x_i^1, \dots, x_i^{n_i-1}, u) \\ b_i^{n_i}(x, u) \end{pmatrix}$$

Pour finir, les matrices A, C , ainsi que le champ de vecteurs $b(x, u)$ décrivant la dynamique de (Σ_c) sont exprimés à l'aide des différents sous-systèmes précédemment définis :

$$A = \text{diag} [A_1, \dots, A_{n_y}], \quad b(x, u) = \begin{pmatrix} b_1(x, u) \\ \vdots \\ b_{n_y}(x, u) \end{pmatrix} \text{ et } C(u) = \text{diag} [C^1, \dots, C^{n_y}].$$

Le système à mesures asynchrones associé à (Σ_c) est alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + b(x(t), u(t)) & \text{avec } x(0) = x_0 \\ y(t_k) = C_{\sigma_k} x(t_k) \end{cases} \quad (\Sigma_{acd})$$

1. En premier lieu, le vecteur de sortie est lui-même divisé en sous-vecteurs. L'objectif étant de traiter d'un seul tenant l'ensemble des mesures qui sont toujours disponibles aux mêmes instants — très probablement parce qu'elles proviennent physiquement d'un même capteur.

Soit i un entier positif. Un *capteur*, noté s_i , désigne un sous-ensemble non-trivial de $\{1, \dots, n_y\}$, qui lui-même définit un vecteur $y^{(s_i)}(t) = \{y^j(t) : j \in s_i\}$.

Les résultats présentés dans ce manuscrit ne portent que sur le cas où l'ensemble de tous les capteurs constitue une partition de $\{1, \dots, n_y\}$. Par conséquent, si n_s désigne le nombre de capteurs associés à (Σ_c) , alors $1 \leq n_s \leq n_y$.

De plus, nous considérons qu'un capteur est toujours composé d'indices successifs, ce qui est toujours possible au prix d'une ré-indexation de l'ensemble des variables de (Σ_c) .

La matrice de sortie correspondant à un capteur s_i sera donc de dimension $(|s_i| \times n)$ et est définie par la relation :

$$y^{(s_i)}(t) = C^{(s_i)} x(t).$$

Il s'agit donc tout simplement de la concaténation des matrices C^j où $j \in s_i$.

2. Dans un second temps, chaque capteur s_i est associé à une subdivision du temps, notée $\{s_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}'}$, et une subdivision globale $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} := \bigcup_{i=1}^{n_s} \{s_l^{(i)}\}_{l \in \mathbb{N}}$$

où les éléments redondants, c'est-à-dire appartenant à plusieurs subdivisions $\{s_l^{(i)}\}$, ne sont pris en compte qu'une seule fois.

Cette dernière subdivision décrit l'ensemble des instants auxquels une mesure est disponible.

3. Finalement, à chaque instant t_k il existe toujours, par construction, au moins un capteur s_i tel que $s_l^{(i)} = t_k$ pour un certain indice l . Soit σ_k l'ensemble des indices désignant les capteurs ayant cette propriété, à savoir :

$$\sigma_k = \left\{ i \in \{1, \dots, n_s\} \mid \exists l \in \mathbb{N} \text{ tel que } s_l^{(i)} = t_k \right\}$$

Bien sûr, l'indice l apparaissant dans la définition de σ_k différera de l'indice k lui-même et changera en fonction du capteur s_i dont il sera question. Par conséquent, pour chaque $i \in \sigma_k$, $l_k^{(i)}$ désigne l'indice $l \in \mathbb{N}$ tel que $s_l^{(i)} = t_k$, ce que l'on écrira³ plus volontiers $s_{l_k^{(i)}}^{(i)} = t_k$.

La matrice de sortie C_{σ_k} , associée à l'ensemble σ_k et de dimension $(\sum_{i \in \sigma_k} |s_i| \times n)$ est la concaténation des matrices $C^{(s_i)}$ qui correspondent aux sorties effectivement disponibles — ou mesurées — à l'instant t_k :

$$C_{\sigma_k} = \begin{pmatrix} \vdots \\ C^{(s_i)} \\ \vdots \end{pmatrix}_{i \in \sigma_k} \quad \text{et ainsi} \quad y_k = y(t_k) = C_{\sigma_k} x(t_k) \quad \text{cf. } (\Sigma_{acd})$$

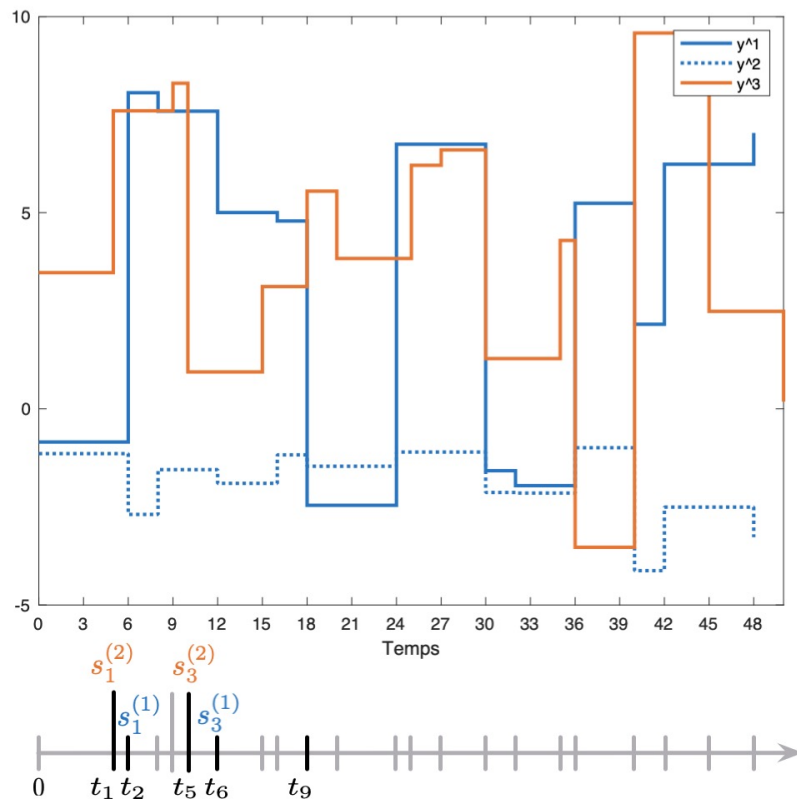


FIGURE 3.1 – Représentation des subdivisions $\{t_k\}$ et $\{s_k^{(i)}\}$, où $i \in \{1, 2\}$.

Afin d'illustrer ces définitions, considérons un système à trois sorties et deux capteurs : $(y(t) \in \mathbb{R}^3)$, $s_1 = \{1, 2\}$ et $s_2 = \{3\}$. La figure 3.1 propose un exemple de ce à quoi pourrait

3. La notation $s_{l_k^{(i)}}^{(i)} = t_k$ peut sembler intéressante car moins lourde. Cependant, conserver la redondance de l'indice i insiste sur le fait que l'indice l_k correspond à l'un des capteurs seulement et facilite, en pratique, la lecture des calculs.

ressembler les subdivisions de temps $\{t_k\}$, $\{s_k^{(1)}\}$ et $\{s_k^{(2)}\}$. Dans cet exemple, sur l'intervalle $[0, 18]$, les différentes subdivisions⁴ sont :

$$\left. \begin{array}{l} \{s_k^{(1)}\} = \{0, 6, 8, 12, 16, 18, \dots\} \\ \{s_k^{(2)}\} = \{0, 5, 9, 10, 15, 18, \dots\} \end{array} \right\} \{t_k\} = \{0, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18\}$$

Par conséquent :

- $t_1 = s_1^{(2)} = 5$, l'ensemble des capteurs disponibles à cet instant est $\sigma_1 = \{2\}$ et l'indice correspondant dans la subdivision 2 est $l_1^{(2)} = 1$;
- $t_2 = s_1^{(1)} = 6$, $\sigma_2 = \{1\}$ et l'indice correspondant dans la subdivision 1 est $l_2^{(1)} = 1$;
- $t_5 = s_3^{(2)} = 8$, $\sigma_5 = \{2\}$ et l'indice correspondant dans la subdivision 2 est $l_5^{(2)} = 3$;
- $t_6 = s_3^{(1)} = 12$, $\sigma_6 = \{1\}$ et l'indice correspondant dans la subdivision 1 est $l_6^{(1)} = 3$;
- $t_9 = s_5^{(1)} = s_5^{(2)} = 18$, $\sigma_9 = \{1, 2\}$ et l'indice correspondant dans la subdivision 1 est $l_9^{(1)} = 5$. Dans la subdivision 2, $l_9^{(2)} = 5$ cependant, l'égalité de la valeur de ces indices est une coïncidence⁵.

3.3 Un filtre de Kalman étendu grand-gain pour les systèmes à mesures asynchrones

L'observateur proposé est un filtre de Kalman grand-gain continu-discret adapté au processus de mesures asynchrones décrit dans la section précédente. Sa définition est séparée en deux parties :

1. **partie prédiction** : composée de deux équations différentielles lorsque $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k \in \mathbb{N}^*$, ayant pour valeurs initiales $z_{k-1}^{(+)}$ et $S_{k-1}^{(+)}$;
2. **partie correction** : composée de deux équations aux différences calculées aux instants de mesures.

Equations de prédiction

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A(u)z(t) + b(z, u) \\ \dot{S}(t) = -(A(u) + D_x b(z, u))' S(t) - S(t) (A(u) + D_x b(z, u)) - (SQ_\theta S)(t) \end{cases} \quad (\mathcal{O}_1)$$

Equations de correction

$$\begin{cases} z_k^{(+)} = z_k^{(-)} - S_k^{(+)-1} \sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} (R_\theta^{(s_i)})^{-1} (C^{(s_i)} z_k^{(-)} - y_k^{(s_i)}) (s_{l_k^{(i)}}^{(i)} - s_{l_k^{(i)}-1}^{(i)}) \\ S_k^{(+)} = S_k^{(-)} + \sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} (R_\theta^{(s_i)})^{-1} C^{(s_i)} (s_{l_k^{(i)}}^{(i)} - s_{l_k^{(i)}-1}^{(i)}) \end{cases} \quad (\mathcal{O}_2)$$

Autrement dit, une opération de correction a lieu à chaque fois qu'une nouvelle mesure est disponible, c'est-à-dire lorsque $t \in \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Cette correction est réalisée pour chacune des mesures $y_k^{(s_i)}$ qui sont effectivement disponibles. Pour chaque mesure, un facteur de pondération (égal au temps écoulé depuis la dernière fois que cette sortie spécifique a été mesurée) entre en jeu.

Les matrices Q_θ et $R_\theta^{(s_i)}$ — que l'on peut choisir dépendantes du temps si l'on respecte certaines contraintes, entre autres (3.1)-(3.2) — sont de la forme suivante :

$$Q_\theta = \theta \Delta^{-1} Q \Delta^{-1} \quad \text{et} \quad R_\theta^{(s_i)} = \frac{1}{\theta} \delta^{(s_i)} R^{(s_i)} \delta^{(s_i)} \quad \text{où}$$

4. Le temps 0 ne correspond pas réellement à un temps mesure, il est cependant inclus à chaque subdivision dans un souci de cohérence.

5. Toute ressemblance avec des faits réels est fortuite.

- Q et $R^{(\mathfrak{s}_i)}$ sont des matrices symétriques définies positives, de dimensions $(n \times n)$ et $(|\mathfrak{s}_i| \times |\mathfrak{s}_i|)$, respectivement, telles que :

$$q \text{ Id} \leq Q \leq \bar{q} \text{ Id} \quad \text{où} \quad 0 < q < \bar{q} \quad (3.1)$$

$$r_i \text{ Id} \leq R^{(\mathfrak{s}_i)} \leq \bar{r}_i \text{ Id} \quad \text{où} \quad 0 < r_i < \bar{r}_i \quad (3.2)$$

- $\delta^{(\mathfrak{s}_i)}$ et Δ sont toutes deux diagonales et sont construites à l'aide de la quantité $n^* = \max(n_1, n_2, \dots, n_{n_y})$ et d'un scalaire $\theta \geq 1$ (le paramètre de grand gain) :

$$\Delta = \text{diag} [\Delta_1, \dots, \Delta_{n_y}] \quad \text{où} \quad \Delta_i = \text{diag} \left[\frac{1}{\theta^{n^* - n_i}}, \dots, \frac{1}{\theta^{n^* - 1}} \right]$$

$$\text{et} \quad \delta^{(\mathfrak{s}_i)} = \text{diag} \left[\left\{ \theta^{n^* - n_j} : j \in (\mathfrak{s}_i) \right\} \right]$$

Finalement, $R = \text{diag} [R^{(\mathfrak{s}_1)}, \dots, R^{(\mathfrak{s}_{n_s})}]$ et $R_\theta = \text{diag} [R_\theta^{(\mathfrak{s}_1)}, \dots, R_\theta^{(\mathfrak{s}_{n_s})}]$, ou, de manière équivalente, en définissant $\delta = \text{diag} [\delta^{(\mathfrak{s}_1)}, \dots, \delta^{(\mathfrak{s}_{n_s})}]$: $R_\theta = \frac{1}{\theta} \delta R \delta$.

Les données initiales de l'observateur sont composées de l'état initial⁶ $z(0) \in \chi \subset \mathbb{R}^n$ et de $S(0)$, une matrice symétrique définie positive.

Remarque 3. D'après l'équation (\mathcal{O}_2), la matrice R ne peut pas être n'importe quelle matrice symétrique définie positive de dimension $(n_y \times n_y)$. En effet, R doit être diagonale par bloc, chaque bloc correspondant à l'un des capteurs \mathfrak{s}_i . Procéder de la sorte nous permet la prise en compte de possibles corrélations entre certaines sorties.

Théorème 2. Etant donné le système continu-discret à mesures asynchrones (Σ_{acd}) construit à partir de la forme normale (Σ_c), sous les hypothèses de la Section 3.2.

Etant donné :

1. $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$, les vecteurs d'état et de sortie de (Σ_{acd});
2. $n_s \geq 1$, un entier tel que $y(t)$ soit composé de n_s sous-vecteurs de telle sorte que pour $i \in \{1, \dots, n_s\}$:
 - la dimension du sous-vecteur de $y(t)$ correspondant, $y^{(i)}(t)$, est notée n_i ;
 - une subdivision du temps, possiblement non-uniforme, notée $\left\{ s_k^{(i)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$, indique les instants auxquels le sous-vecteur de $y(t)$ correspondant est mesuré;
 - $\delta t^{(i)}$ désigne la taille maximale d'un pas de $\left\{ s_k^{(i)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Etant donné le filtre de Kalman étendu grand-gain asynchrone donné par (\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_2), dont l'état estimé est noté $z(t) \in \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $T > 0$, il existe des constantes positives $K_1, K_2, K_3, \theta_0 > 1$, et μ_i , pour $i \in \{1, \dots, n_s\}$, telles que pour tout $\theta > \theta_0$ et $\theta \delta t^{(i)} < \mu_i$, l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $t \geq \frac{T}{\theta}$:

$$\|z(t) - x(t)\|^2 \leq \left\| z \left(\frac{T}{\theta} \right) - x \left(\frac{T}{\theta} \right) \right\|^2 \theta^{2(n^* - 1)} K_1 e^{(K_2 - \theta K_3)(t - \frac{T}{\theta})} \quad (3.3)$$

où $n^* = \max_{i \in \{1, \dots, n_y\}} \{n_i\}$.

Remarque 4. 1. Nous retrouvons à l'équation (3.3), une des caractéristiques classiques de la théorie grand-gain, à savoir que θ doit-être assez grand pour assurer la négativité de $K_2 - \theta K_3$.

2. Le détail de la preuve et les expressions exactes de K_1, K_2 et K_3 ne sont pas reproduits dans ce manuscrit et peuvent-être trouvés dans l'article [Fed+20].

6. $z(0) = z_0^{(+)} = z_0^{(-)}$.

3.4 Discussion

La preuve du théorème 2 repose sur l'analyse de la dynamique de l'erreur d'estimation $\varepsilon(t) = z(t) - x(t)$ et l'étude de la fonction de Lyapunov $(\varepsilon' S \varepsilon)(t)$.

Dans l'approche grand-gain, le paramètre θ joue un rôle crucial : il doit être assez grand pour supplanter l'influence des non-linéarités et forcer la convergence. Cependant, la preuve ne peut se dérouler que si l'on est capable de manipuler ce paramètre de sorte à ce qu'il ne soit plus au coeur de la dynamique. Autrement dit, de sorte à ce que les paramètres K_2 et K_3 cités plus haut soient indépendants de θ .

Pour atteindre ce but, nous passons par un changement de variables et une reparamétrisation de la variable de temps de la forme $\tau = \theta t$. Les résultats principaux sont alors établis dans la base de temps τ puis ramenés dans la base de temps initiale⁷.

Ainsi, la preuve de convergence peut-être décomposée en deux séquences. Celle décrite ci-dessus, souvent dénommée *préparation de la preuve* et une seconde consistant à former le résultat de convergence dans la base de temps τ . Dans la suite de cette discussion, nous utilisons la notation $\bar{\varepsilon}(\tau)$ pour dénommer les différentes quantités après changement de variables et changement de base temps.

Démontrer la convergence de l'observateur par l'analyse de la fonction de Lyapunov $(\bar{\varepsilon}' \bar{S} \bar{\varepsilon})(\tau)$ se révèle être relativement direct à partir du moment où il est possible de garantir que la matrice de Riccati \bar{S} reste bornée (au sens de l'inégalité matricielle). Lors de l'étape de *correction*, la relation

$$(\bar{\varepsilon}'_k \bar{S}_k \bar{\varepsilon}_k)^{(+)} \leq (\bar{\varepsilon}'_k \bar{S}_k \bar{\varepsilon}_k)^{(-)} \quad (3.4)$$

est établie indépendamment de :

1. la valeur prise par le paramètre de grand-gain (θ);
2. la forme des pondérations utilisées dans les équations de correction (\mathcal{O}_2) — i.e. à partir du moment où les corrections garantissent la positivité d'une certaine expression, la relation (3.4) pourra toujours être établie.

Lors de l'étape de *prédiction*, le calcul de la variation de la fonction de Lyapunov le long de la courbe d'erreur permet de faire émerger le terme $(K_2 - \theta K_3)$ que l'on retrouve dans la majoration (3.3). C'est ce terme qui permet de conclure à l'existence d'une valeur de θ à partir de laquelle la convergence est globalement garantie. En particulier, l'expression de K_2 fait intervenir la constante de Lipschitz (multiplicativement), ainsi, une interprétation possible est que θ doit-être choisi assez grand pour "écraser" les non-linéarités. De plus, parce que les expressions de K_2 et K_3 font intervenir les bornes de la matrice de Riccati $\bar{S}(\tau)$, alors ces dernières doivent-être établies indépendamment de la valeur de θ de sorte à ce que le raisonnement global ne présente pas de boucle logique de la forme :

$$\theta \rightarrow (K_2, K_3) \rightarrow \theta.$$

Le résultat le plus difficile à établir est celui portant sur la matrice de Riccati $\bar{S}(\tau)$ qui prend la forme du théorème ci-dessous.

Théorème 3.

Soit l'équation de Riccati matricielle continue-discrète asynchrone suivante.

$$\begin{cases} \frac{d\bar{S}(\tau)}{d\tau} = -\mathcal{A}'(\tau)\bar{S}(\tau) - \bar{S}(\tau)\mathcal{A}(\tau) - \bar{S}(\tau)Q\bar{S}(\tau) \\ \bar{S}_k^{(+)} = \bar{S}_k^{(-)} + \sum_{i \in \sigma_k} C^{(s_i)'} R^{(s_i)-1} C^{(s_i)} \left(\bar{S}_k^{(i)} - \bar{S}_k^{(i)-1} \right) \end{cases} \quad (3.5)$$

où la paire (\mathcal{A}, C) est non-stationnaire et observable — cf. [Son90].

7. En particulier, c'est le passage d'une base de temps à l'autre qui génère le terme $\frac{T}{\theta}$ dans (3.3), ainsi que les conditions de type $\theta \delta^{(i)} < \mu_i$.

Les éléments des matrices \mathcal{A} et \mathcal{C} sont supposés appartenir à $L^\infty([0, T], \mathbb{R})$, et être uniformément bornés pour la norme L^∞ par un scalaire positif B . Il est de plus demandé aux éléments de \mathcal{C} d'être temps-dérivables au moins une fois, et que les dérivées soient bornées pour tout les temps.

Alors, si $\bar{S}(0)$ est choisie symétrique définie positive, $\bar{S}(\tau)$ reste symétrique définie positive pour tout $\tau > 0$. De plus, pour tout $\bar{T} > 0$ fixé, il existe des constantes $\mu_i > 0$, $i \in \{1, \dots, n_s\}$, et $0 < \alpha < \beta$, telles que pour toute subdivision $\{\bar{s}_k^{(i)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ respectant $(\bar{s}_k^{(i)} - \bar{s}_{k-1}^{(i)}) \leq \mu_i$, nous pouvons établir la relation :

$$\alpha Id \leq \bar{S}(\tau) \leq \beta Id \quad \text{pour tout } \tau \geq \bar{T} \quad (3.6)$$

Les constantes α et β ci-dessus sont établies indépendamment de la valeur de θ et de la structure des subdivisions.

La preuve de ce théorème, assez technique, est basée sur des idées que l'on retrouve dans le livre [GK01] dans le cadre continu et qui ont été exploitées dans [BB16] dans le cadre continu-discret synchrone. Parmi les aspects remarquables de cette preuve, remarquons les points ci-dessous.

1. Malgré le fait que le résultat de bornitude (3.6) n'est pas valable depuis le temps 0, il pourrait être étendu sur l'intervalle $[0, \bar{T}]$. Cependant, ce résultat basé sur l'utilisation du lemme de Gronwall repose sur la connaissance d'un encadrement de la donnée initiale $\bar{S}(0)$. Le changement de variables mentionné plus tôt dans la discussion fait que $\bar{S}(0)$ dépend de θ , information que l'on ne peut pas retenir si l'on ne veut pas rentrer dans la boucle logique $\theta \rightarrow (K_2, K_3) \rightarrow \theta$. Cette difficulté technique peut-être contournée si l'on autorise au paramètre θ à varier depuis une valeur initiale connue — i.e. $\theta(0) = 1$ — vers une certaine valeur terminale permettant d'établir la convergence de l'observateur, comme cela est fait dans la thèse [Boi10].
2. La borne supérieure de (3.6) repose principalement sur la régularité du système (3.5). Il faut cependant garantir que le processus de prédiction-correction ne dérive pas. Plus précisément, le processus de prédiction est à tendance décroissante, celui de correction est à tendance croissante. La difficulté est donc de faire apparaître un équilibre entre les deux. Cet équilibre apparaît lorsque le pas maximal de la subdivision globale $\{\tau_k\}$ est borné.
3. Quelle que soit la borne que l'on cherche à établir, des sommes de la somme pondérée qui apparaît dans le processus de correction vont apparaître. Il s'agit de termes de la forme :

$$S_k = r \sum_{j=1}^k \sum_{i \in \mathcal{O}_k} \left(\bar{s}_{l_k^{(i)}}^{(i)} - \bar{s}_{l_k^{(i)}-1}^{(i)} \right) \quad (3.7)$$

pour une certaine quantité r indépendante du temps, et où S_k indique que la somme est calculée au temps τ_k . Le choix des pondérations⁸ est alors très important ici car cette expression est en fait égale à :

$$S_k = r \sum_{i=1}^{n_s} \bar{s}_{\lambda_k^{(i)}}^{(i)} \quad (3.8)$$

où l'indice $\lambda_k^{(i)}$ est défini comme l'indice de la subdivision de temps associée au capteur s_i permettant de déterminer la dernière fois que ce capteur spécifique a fourni une mesure — ou autrement dit :

$$\bar{s}_{\lambda_k^{(i)}}^{(i)} = \max_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \bar{s}_j^{(i)} \leq \tau_k \right\}.$$

L'expression (3.8) est de première importance pour établir des majorations permettant de déboucher à la borne supérieure, mais aussi pour garantir la proximité au Grammien d'observabilité continu, sujet qui fait l'objet du point suivant.

4. La borne inférieure de (3.6) est une traduction de la préservation de l'observabilité sous la contrainte des mesures asynchrones. En effet, dans [GK01], l'existence de la

8. Rappel : la pondération associée à un capteur donné est égale au temps écoulé depuis la dernière que ce dernier a fourni une mesure.

borne inférieure est une conséquence du fait que le Grammien d’observabilité de la paire (\mathcal{A}, C) est lui-même borné (au sens des matrices). Dans le travail commenté ici, la preuve s’attache à construire un Grammien d’observabilité continu-discret asynchrone qui soit une bonne approximation du Gramien continu — qui est une intégrale du temps. Pour cela, nous avons besoin que la somme de l’ensemble des pondérations de l’étape de correction correspondent effectivement au temps écoulé. Autrement dit, il faut que (3.7) puisse s’écrire sous la forme (3.8).

Une fois que cette approximation est écrite, la borne inférieure est établie sous la contrainte que le pas d’échantillonnage maximal de chacun des capteurs doit-être *assez petit*. Ce résultat peut aussi, d’une certaine manière, se comprendre comme une condition pour la préservation de l’observabilité suite à un échantillonnage asynchrone. Ce résultat nécessite aussi que l’état du système dynamique soit contenu dans un compact, condition qui est absente de l’exemple que nous avons présenté en début de section⁹.

Sur le sujet de la préservation de l’observabilité des systèmes non-linéaires sous des contraintes d’échantillonnage, le lecteur pourra trouver un traitement plus profond dans les travaux de [AV03; Amm06; AMV18].

5. Avec cette dernière remarque, nous aimerions insister sur l’intérêt que revêt l’approche par subdivisions de temps. En effet, en procédant de la sorte, la seule contrainte imposée sur les subdivisions de temps est celle — attendue — qui porte sur la taille maximale du pas. Ce traitement nous semble intéressant car cela ne préjuge ni ne contraint en rien l’ordre dans lequel les différents capteurs fournissent leurs mesures. Il faut aussi se rappeler que la preuve de bornitude de l’équation de Riccati est faite dans la base de temps $\tau = \theta t$. Si l’on veut explorer des stratégies pour lesquelles le paramètre θ varie, cette absence de structure a pour conséquence que le théorème 3 reste valable dans un tel cadre.

3.5 Exemple illustratif

Dans cette dernière section, nous proposons d’illustrer les performances de cet observateur à travers un résultat de simulation inspiré de la robotique. Ni le modèle, ni la forme normale correspondante ne seront détaillés ici, elles pourront toutefois être trouvées dans [Fed+20].

Un robot mobile évolue sur un plan délimité par deux balises notées A et B dans la figure 3.2. L’état du robot est composé de

- la position d’un point intérêt dans le repère $(A, \mathcal{X}_1^r, \mathcal{X}_2^r)$ — cette position est notée (x_1, x_2) dans la figure 3.2;
- son orientation, donnée par l’angle entre l’horizontale et la direction \mathcal{X}_1^b attachée au robot.

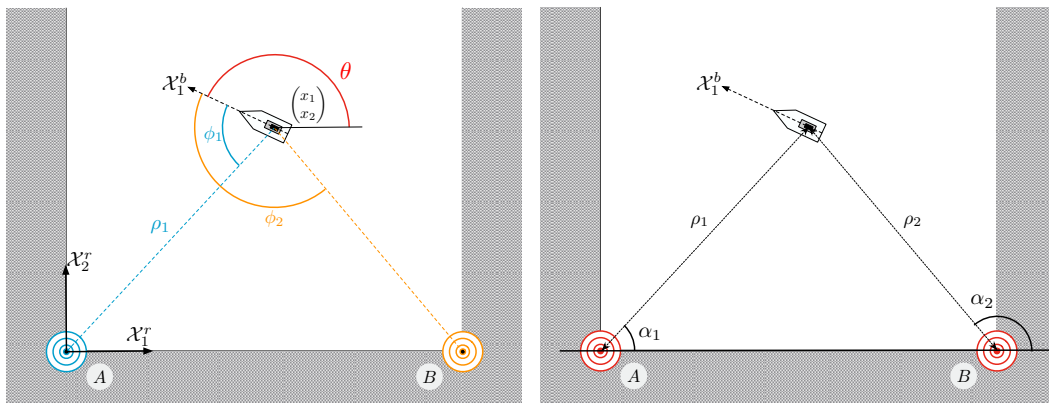


FIGURE 3.2 – Localisation d’un robot mobile à l’aide de deux balises

9. Si x_4 est borné, alors il existe toujours un Δt assez petit pour que la relation $x_4(0)\Delta t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ne soit pas vérifiée.

Les mesures sont données, par exemple, par un capteur LIDAR¹⁰ positionné en (x_1, x_2) . Elles consistent, en utilisant les notations de la figure 3.2 :

- d’une part, en l’angle ϕ_1 et en la distance ρ_1 ;
- d’autre part, en l’angle ϕ_2 .

Ces mesures sont obtenues lorsque le faisceau du LIDAR est aligné avec la balise concernée, par conséquent, elles sont asynchrones. Les mesures ont lieu à des intervalles de temps non-homogènes puisqu’elles dépendent de la position, de l’orientation et du mouvement du robot, mais sont alternées — sauf en cas d’erreur de traitement de la part du LIDAR, erreur qui n’est pas simulée ici, mais qui est bien réelle en pratique. La figure 3.3 ci-dessous montre la trajectoire parcourue par le robot durant la simulation ainsi que les instants auxquels les mesures sont prises. Une étoile de une couleur donnée indique une prise de mesure relative à la balise de la même couleur.

Pour finir, la figure 3.4 montre le résultat de trois simulations. La partie de gauche correspond à des simulations effectuées sans bruit de mesure et pour deux valeurs du paramètre de grand gain. Comme attendu, la convergence de l’observateur est d’autant plus rapide que θ est grand. La partie de droite correspond à une simulation effectuée en introduisant un bruit de mesure additif. Seule la trajectoire estimée en utilisant la valeur $\theta = 3$ est représentée, et pertinente, car la sensibilité au bruit du second réglage est très importante.

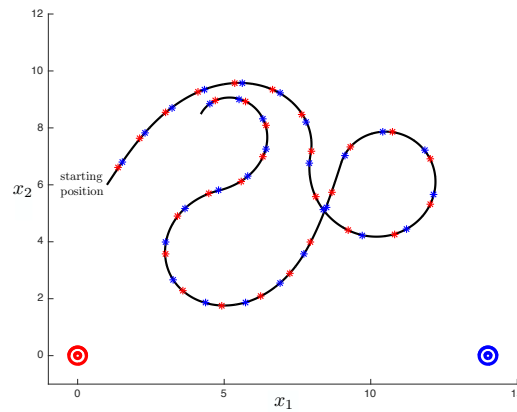


FIGURE 3.3 – Trajectoire du robot et instants de mesure.

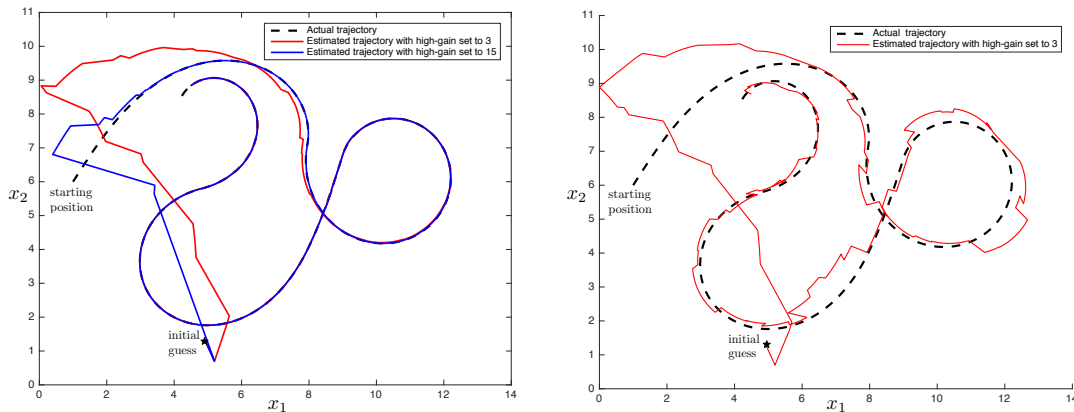


FIGURE 3.4 – Reconstruction de la trajectoire.

La remarque précédente constitue bien sûr une ouverture vers un processus d’adaptation du paramètre de grand gain à la façon de [BBG10]. Entre autres perspectives, l’approche [RLH17] faisant appel à plusieurs paramètres grand-gain — e.g. un par sortie —, ou les études récentes [AM15; AZ16; Zem+19] portant sur des observateurs à la structure modifiée dans le but de nécessiter une valeur plus basse du paramètre de grand-gain, pourraient être exploitées. Enfin, nous avons supposé que l’ensemble des capteurs $\{s_i\}$ constituait une

10. Light Detection And Ranging.

partition de l'ensemble des sorties, ou autrement dit que l'information mesurée n'était pas redondante. L'exemple de robots sous-marins équipés de capteurs tantôt efficaces en surface, tantôt efficaces en plongée nous amène à imaginer le cas de systèmes dont les mesures sont fournies par un jeu de capteurs dont la configuration change dans le temps.

Chapitre 4

Epilogue

Les perspectives et questionnements spécifiques à chacune des problématiques ont été présentés dans leur chapitre dédié. Ces quelques lignes proposent d'autres ouvertures, ou pistes de recherche.

L'étude des observateurs dans le cadre de mesures échantillonnées offre plusieurs problématiques que l'on ne rencontre pas dans le cadre continu. L'asynchronicité en était une, la *datation incertaine* en est une autre. Ce terme désigne les systèmes continu-discrets, ou discrets, pour lesquels les instants de prise de mesure sont mal connus. Cette situation pourra être rencontrée lorsque les capteurs, ou le réseau de capteurs, délivrant l'information de sortie sont régis par des protocoles qui n'assurent pas toujours une véritable transmission temps-réel. Par exemple, dans le cas de l'image d'une cible en mouvement prise par une caméra, l'erreur de mesure est bien plus liée à la datation exacte de l'image plutôt qu'aux erreurs du capteur (souvent subpixelles). Ce type de problématique semble avoir été abordée dans la littérature sous la forme d'un retard variable additionné aux instants de mesures, et que l'on cherche à estimer. Il semble intéressant de s'interroger sur la pertinence d'un autre formalisme dans le but de proposer une étude d'observabilité *ad-hoc*, ou des algorithmes performants.

Une partie de mon travail, non présentée ici, porte sur la mise en pratique des algorithmes ou modèles mathématiques que j'étudie. A titre d'exemple, les travaux [SB14; SBB10; Boi+07; BB07; FP+19] concernent les observateurs, et l'article [BS20] exploite, d'après une idée de M. Ludovic Sacchelli, un modèle de champ de directions appliqué au domaine de l'étude des empreintes digitales. La thèse de Mme. Aïda Feddaoui Papin, co-dirigée par les Pr. Eric Busvelle et Vincent Hugel, ainsi que les responsabilités pédagogiques que j'exerce dans le Master *ingénierie des systèmes complexes*¹ de l'UFR *Sciences et Technologies*, m'ont rapproché des membres du laboratoire de robotique² de l'Université de Toulon, favorisant ainsi l'émergence de projets de recherche³ conjoints.

1. Depuis 2018, et jusqu'à présent, j'assure la responsabilité pédagogique de la première année du parcours Robotique et Objets Connectés du Master *Ingénierie des Systèmes Complexes* de l'UFR *Sciences et Technologies* (Resp. Pr. Claude Jauffret).

2. Laboratoire de COncEption de Systèmes Mécaniques et Robotiques — COSMER.

3. Par exemple, je participe au projet Région DPII *Drone Plongeur Interaction Intuitive* porté par Mme Claire Dune.

Bibliographie

Liste de publications

Articles de journal

- [BB16] N. BOIZOT et E. BUSVELLE. « On the stability of a differential Riccati equation for continuous-discrete observers ». In : *International Journal of Control* 89.2 (2016), p. 322-336.
- [BBG10] N. BOIZOT, E. BUSVELLE et J-P. GAUTHIER. « An adaptive high-gain observer for nonlinear systems ». In : *Automatica* 46.9 (2010), p. 1483-1488.
- [BG13a] N. BOIZOT et J-P. GAUTHIER. « Motion Planning for Kinematic Systems ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 58.6 (2013).
- [BG13b] N. BOIZOT et J.P. GAUTHIER. « On the motion planning of the ball with a trailer ». In : *Mathematical Control & Related Fields* 3.3 (2013), p. 269-286.
- [BS20] N. BOIZOT et L. SACCHELLI. « A bisector Line Field Approach to Interpolation of Orientation Fields ». In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 10.1007/s10851-020-00990-5 (2020).
- [Fed+20] Aïda FEDDAOUI et al. « High-gain extended Kalman filter for continuous-discrete systems with asynchronous measurements ». In : *International Journal of Control* 93.8 (2020), p. 2001-2014.
- [OB20] O. OUKACHA et N. BOIZOT. « Consumption minimization for an academic model of a vehicle ». In : *Optim. Control Appl. Meth.* 41.4 (2020), p. 1288 -1320.
- [SB14] K. D. SEBESTA et N. BOIZOT. « A Real-Time Adaptive High-gain EKF, Applied to a Quadcopter Inertial Navigation System ». In : *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 61 (2014), p. 495-503.

Articles de conférence

- [Aja+12] A. AJAMI et al. « Simulation of a UAV ground control station ». In : *9th International Conference on Modeling, Optimization and SIMulation, Bordeaux, France*. 2012.
- [BBG09] N. BOIZOT, E. BUSVELLE et J-P. GAUTHIER. « Adaptive-gain Extended Kalman Filter : Extension to the Continuous-discrete Case ». In : *Proceedings of the 10th European Control Conference (ECC09)*. 2009.
- [BBS07] N. BOIZOT, E. BUSVELLE et J. SACHAU. « High-gain observers and Kalman Filtering in Hard Realtime ». In : *9th Real-Time Linux Workshop, Institute for Measurement Technology, Johannes Kepler University of Linz*. 2007.
- [Boi+07] N. BOIZOT et al. « Adaptive-gain Extended Kalman Filter : Application to a series connected DC motor ». In : *Conference on Systems and Control, Marrakech, Morocco*. 2007.
- [Fed+17] A. FEDDAOUI et al. « A Kalman filter for linear continuous- discrete systems with asynchronous measurements ». In : *IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. 2017.
- [FP+19] A. FEDDAOUI-PAPIN et al. « Continuous-Discrete High- Gain Extended Kalman Filter for Mobile Robots with Asynchronous Outputs ». In : *8th International Conference on Systems and Control (ICSC)*. 2019.
- [OB17] O. OUKACHA et N. BOIZOT. « Consumption minimisation for a car-like robot : Case study for a non-flat road profile ». In : *6th International Conference on Systems and Control (ICSC), Batna (Algeria)*. 2017.

- [Ouk+14] O. OUKACHA et al. « Optimisation de la consommation d'une voiture électrique : un cas simple ». In : *Colloque sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information (COSI'2014), Béjaïa (Algérie)*. 2014.
- [SBB10] K. D. SEBESTA, N. BOIZOT et E. BUSVELLE. « Using an adaptive high-gain extended Kalman filter with a car efficiency model ». In : *ASME DSC, Boston*. 2010.

Chapitre de livre

- [BB07] N. BOIZOT et E. BUSVELLE. « Nonlinear Observers and Applications ». In : t. 363. LNCIS. Springer, 2007. Chap. Adaptive-gain Observers and Applications.

Rapport technique et exposés

- [BB08] E. BUSVELLE et N. BOIZOT. « Some new results on the solution of continuous-discrete Riccati equations (Exposé) ». In : *International conference on Mathematical Control Theory and Mechanics, Steklov Mathematical institute, Suzdal (Fed. of Russia)*. 2008.
- [BBG08] N. BOIZOT, E. BUSVELLE et J-P. GAUTHIER. « Adaptive-gain in Extended Kalman Filtering (Exposé) ». In : *International conference on Differential equations and Topology, MSU, Moscow (Fed. of Russia)*. 2008.
- [Boi11] N. BOIZOT. « On the determination of unknown functions in differential systems : an account of the Busvelle-Gauthier theory (Exposé) ». In : *Réunion du GT Identification (GdR MACS), Paris (France)*. 2011.
- [Boi12] N. BOIZOT. « Planification de trajectoire pour les objets cinématiques. Cas du problème Boule-Plan avec chariot (Exposé) ». In : *Séminaire du Laboratoire d'Automatique de Génie des Procédés et Pharmaceutiques (LAGEPP UMR 5007), Lyon (France)*. 2012.
- [Boi13a] N. BOIZOT. « Path planning for kinematic systems : a conjecture (Exposé) ». In : *Mathematical Control in Trieste, Trieste (Italy)*. 2013.
- [Boi13b] N. BOIZOT. « Planification de trajectoire pour les objets cinématiques : approximation de chemins fortement non-admissibles (Exposé) ». In : *Journées Scientifiques de JSLAROMAD, Tizi-Ouzou (Algérie)*. 2013.
- [Glo+18] H. GLOTIN et al. *Etho-acoustique 3D du cachalot en zone anthropisée depuis le drone de surface Sphyrna*. <http://www.sphyrna-odyssey.com>. Rapport de la mission Sphyrna 2018. 2018.
- [OB16] O. OUKACHA et N. BOIZOT. « Minimisation L^1 de la consommation d'une voiture (Poster) ». In : *Journée MODE-SMAI, Toulouse (France)*. <https://mode2016.sciencesconf.org/85069/document>, 2016.

Thèse

- [Boi10] N. BOIZOT. « Adaptive high-gain extended Kalman filter and applications ». Thèse de doct. Université du Luxembourg et Université de Bourgogne, 2010.

Autres références

- [ABB20] A. A. AGRACHEV, D. BARILARI et U. BOSCAIN. *A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry*. T. 181. Cambridge studies in advances mathematics. Cambridge University Press, 2020.
- [ACG98] A. A. AGRACHEV, H. E. A. CHAKIR et J-P. GAUTHIER. « Subriemannian Metrics on \mathbb{R}^3 ». In : *Geometric Control and Non-holonomic Mechanics*. T. 25. Conference Proceedings, Canadian Mathematical Society. 1998, p. 29-78.
- [AG01] A. A. AGRACHEV et J-P. GAUTHIER. « Subriemannian Metrics and Isoperimetric Problems in the Contact Case ». In : *Journal of Mathematical Sciences* 103.6 (2001), p. 639-663.

- [AM15] D. ASTOLFI et L. MARCONI. « A High-Gain Nonlinear Observer With Limited Gain Power ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 60.11 (2015), p. 3059-3064.
- [Amm06] S. AMMAR. « Observability and Observateur Under sampling ». In : *International Journal of Control* 9 (2006), p. 1039-1045.
- [AMV18] S. AMMAR, M. MASSAOUD et J-C. VIVALDA. « Genericity of the Strong Observability for Sampled Systems ». In : *SIAM J. Control and Optimization* 56.2 (2018), p. 1463-1490.
- [AS04] A. A. AGRACHEV et Y. SACHKOV. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. T. 87. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Springer, 2004.
- [AS15] W. ALT et C. SCHNEIDER. « Linear-quadratic control problems with L^1 -control cost ». In : *Optim. Control Appl. Meth.* 36.4 (2015), p. 512-534.
- [AV03] S. AMMAR et J-C. VIVALDA. « On the Preservation of Observability Under Sampling ». In : *Systems and control letters* 52 (2003), p. 7-15.
- [AZ16] A. ALESSANDRI et A. ZEMOUCHE. « On the enhancement of high-gain observers for state estimation of nonlinear systems ». In : *IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE, 2016.
- [Bar+15] C. BARBÉLATÉ et al. « An adaptive controller for autonomous underwater vehicles ». In : *Proceeding of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2015, p. 1658 -1663.
- [BC03] B. BONNARD et M. CHYBA. *Singular Trajectories and their Role in Control Theory*. T. 40. Mathématiques & Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 2003.
- [BD93] R. W. BROCKETT et L. DAI. « Nonholonomic Motion Planning ». In : sous la dir. de Z. LI et J. CANNY. T. 192. International Series in Engineering and Computer Science. Springer, Boston, MA, 1993. Chap. Non-holonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability, p. 1-22.
- [Ber+08] B. BERRET et al. « The Inactivation Principle : Mathematical Solutions Minimizing the Absolute Work and Biological Implications for the Planning of Arm Movements ». In : *PLOS Computational Biology* 4.10 (2008).
- [BGP08] B. BERRET, J.-P. GAUTHIER et C. PAPAXANTHIS. « How Humans Control Arm Movements ». In : *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. T. 261. 2008, p. 44-58.
- [BJ16] B. BERRET et F. JEAN. « Why Don't We Move Slower? The Value of Time in the Neural Control of Action ». In : *The Journal of Neuroscience* 36.4 (2016), p. 1056-1070.
- [BJ75] D. J. BELL et D. H. JACOBSON. *Singular Optimal Control Problems*. Academic Press : London, 1975.
- [BLH03] M. BLAIN, S. LEMIEUX et R. HOUDE. « Implementation of a ROV navigation system using acoustic/Doppler sensors and Kalman filtering ». In : *Oceans 2003. Celebrating the Past ... Teaming Toward the Future*. Institute of Electrical et Electronics Engineers (IEEE), 2003.
- [Blo+03] A. M. BLOCH et al. *Nonholonomic Mechanics and Control*. T. 24. Series in Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [BP04] U. BOSCAIN et B. PICCOLI. *Optimal Syntheses for Control Systems on 2-D Manifolds*. T. 43. Mathématiques & Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 2004.
- [BPJ08] O. BARRERO, J. PETERSEN et S. B. JORGENSEN. « Multirate data assimilation in a cultivation process ». In : *IFAC proceedings volumes*. T. 41. 2. 2008, p. 11433-11438.
- [Bri+10] P.-J. BRISTEAU et al. « Hardware and software architecture for state estimation on an experimental low-cost small-scaled helicopter ». In : *Control Engineering Practice* 18.7 (2010), p. 733-746.
- [CCC16] Z. CHEN, J.-B. CAILLAU et Y. CHITOUR. « L^1 -Minimization for Mechanical Systems ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 54.3 (2016), p. 1245-1265.
- [CCG20] J-B. CAILLAU, O. COTS et J. GERGAUD. *HamPath : On solving optimal control problems by indirect and path following methods*. <http://www.hampath.org>. 2020.

- [Che16] Z. CHEN. « L^1 -optimality conditions for circular restricted three-body problems ». In : *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 126.4 (2016), p. 461-481.
- [Chi18] F. CHITTARO. *Méthodes géométriques en contrôle optimal et contrôle quantique, Habilitation à Diriger des Recherches*. 2018.
- [Cla13] F. CLARKE. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. Springer-Verlag London, 2013.
- [Dez+92] F. DEZA et al. « High-gain Estimation for Nonlinear Systems ». In : *Systems and control letters* 18 (1992), p. 295-299.
- [FA89] G. FRASER-ANDREWS. « Finding candidate singular optimal controls : a state of the art survey ». In : *Journal of Optimization Theory and Applications* 60.2 (1989), p. 25-57.
- [Far+11] M. FARZAA et al. « High gain observer with updated gain for a class of MIMO nonlinear systems ». In : *International Journal of Control* 84 (2011), p. 270-280.
- [FP20] A. FEDDAOUI-PAPIN. « Observateurs non linéaires pour les systèmes à mesures asynchrones : application robotique mobile ». Thèse de doct. Thèse de l'Université de Toulon, 2020.
- [GFPRM04] J.P. GAUTHIER, F. MONROY-PEREZ et C. ROMERO-MELENDZ. « On complexity and Motion Planning for Corank one subriemannian Metrics ». In : *COCV* 10.634-655 (2004).
- [GHO92] J-P. GAUTHIER, H. HAMMOURI et S. OTHMAN. « A simple observer for nonlinear systems, applications to bioreactors ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 37.6 (1992), p. 875-880.
- [Gil92] T. D. GILLESPIE. *Fundamentals of vehicle dynamics*. Premiere Series Books. Society of Automotive Engineers Inc., 1992.
- [GK01] J-P. GAUTHIER et I. KUPKA. *Deterministic Observation Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2001.
- [GMP15] J.P. GAUTHIER et F. MONROY-PÉREZ. « On certain hyperelliptic signals that are natural controls for nonholonomic motion planning ». In : *Math. Control Signals Syst.* 27 (2015), p. 415-437.
- [Gra92] K. A. GRASSE. « On the Relation Between Small-Time Local Controllability and Normal Self-Reachability ». In : *Mathematics of Control, Signal and Systems* (1992), p. 41-66.
- [GZ05a] J.P. GAUTHIER et V. ZAKALYUKIN. « On the codimension one Motion Planning Problem ». In : *Journal of Dynamical and Control systems* 11.1 (2005), p. 73-89.
- [GZ05b] J.P. GAUTHIER et V. ZAKALYUKIN. « On the One-Step-Bracket-Generating Motion Planning Problem ». In : *Journal of Dynamical and Control systems* 11.2 (2005), p. 215-235.
- [GZ05c] J.P. GAUTHIER et V. ZAKALYUKIN. « Robot Motion Planning, a wild case ». In : *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. T. 250. 2005, p. 56-69.
- [GZ06] J.P. GAUTHIER et V. ZAKALYUKIN. « On the motion planning problem, complexity, entropy, and nonholonomic interpolation ». In : *Journal of Dynamical and Control systems* 12.3 (2006), p. 371-404.
- [GZ07] J.P. GAUTHIER et V. ZAKALYUKIN. « Entropy estimations for motion planning problems in robotics ». In : *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute (Volume In honor of Dmitry Victorovich Anosov)*. T. 256. 2007, p. 62-79.
- [GZ10] J.P. GAUTHIER et V. ZAKALYUKIN. « Motion planning and fastly oscillating controls ». In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 48.5 (2010), p. 3433-3448.
- [IBA18] J. A. ISAZA, H. A. BOTERO et H. ALVAREZ. « State Estimation Using Non-uniform and Delayed Information : A Review ». In : *Internal Journal of Automation and Computing* 15 (2018), p. 125-141.
- [Jea01] F. JEAN. « Complexity of Nonholonomic Motion Planning ». In : *International Journal of Control* 74.8 (2001), p. 776-782.
- [Jea03] F. JEAN. « Entropy and Complexity of a Path in subriemannian Geometry ». In : *COCV* 9 (2003), p. 485-506.
- [Jea14] F. JEAN. *Control of Nonholonomic Systems : from Sub-Riemannian Geometry to Motion Planning*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer International Publishing, 2014.

- [Jur93] V. JURDJEVIC. « The Geometry of the Plate-Ball Problem ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 124.4 (1993), p. 305-328.
- [LM67] E. B. LEE et L. MARKUS. *Foundations of optimal control theory*. The SIAM series in Applied Mathematics. John Wiley et Sons, New York-London-Sydney, 1967.
- [MCC15] D. MAALOUF, A. CHEMORI et V. CREUZE. « \mathcal{L}_1 Adaptive Depth and Pitch Control of an Underwater Vehicle with Real-Time Experiments ». In : *Ocean Engineering, Elsevier* 98 (2015), p. 66-77.
- [MK98] D. MAYHEW et P. KACHROO. « Multirate sensor fusion for GPS using Kalman filtering, fuzzy methods, and map matching ». In : *Proceedings of SPIE : Mobile Robots XIII and Intelligent Transportation Systems*. T. 3525(1). 1998, p. 440-449.
- [MP14] H. MAURER et MR. De PINHO. « Optimal Control of Epidemiological SEIR models with L^1 -Objectives and Control-State Constraints ». In : <hal-01101291> (2014).
- [Ouk17] O. OUKACHA. « Optimisation de consommation pour un véhicule de type voiture ». Thèse de doct. Thèse de l'Université de Toulon, 2017.
- [Pon+62] L. S. PONTRYAGIN et al. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. John Wiley et Sons, New York-London-Sydney, 1962.
- [RLH17] M. RASHEDI, J. LIU et B. HUANG. « Distributed adaptive high-gain extended Kalman filtering for nonlinear systems ». In : *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 27 (2017), p. 4873-4902.
- [Ros06] I. M. ROSS. « Modern Astrodynamics ». In : Elsevier, 2006. Chap. Space Trajectory Optimization and L^1 -Optimal Control Problems, p. 155-188.
- [Seb10] K. D. SEBESTA. « Optimal observers and optimal control : improving car efficiency with Kalman et Pontryagin ». Thèse de doct. Université de Bourgogne ; Université du Luxembourg, 2010.
- [Son90] E. SONTAG. *Mathematical Control Theory*. T. 6. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag New-York Berlin Heidelberg, 1990.
- [TC20] Inria Saclay TEAM COMMANDS. *BOCOP : an open source toolbox for optimal control*. <http://bocop.org>. 2020.
- [TSO99] S. TATIRAJU, M. SOROUGH et B. A. OGUNNAIKE. « Multirate Nonlinear State Estimation with Application to a Polymerization Reactor ». In : *AIChE Journal* 45.4 (1999), p. 769-780.
- [VM06] G. VOSSEN et H. MAURER. « On L^1 -minimization in optimal control and applications to robotics ». In : *Optim. Control Appl. Meth.* 27 (2006), p. 301-321.
- [Zem+19] A. ZEMOUCHE et al. « High-gain nonlinear observer with low tuning parameter ». In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 64.8 (2019), p. 3194-3209.

Plan · | · Opti · | · Chrono

(Nicolas BOIZOT)

Mémoire présenté en vue d'obtenir le diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches.

Ce mémoire présente les travaux de recherche les plus significatifs que j'ai menés depuis ma soutenance de thèse. Il s'agit de trois contributions scientifiques relevant soit du domaine de la planification de trajectoire, soit du domaine de la synthèse d'observateurs.

La première partie présente la formalisation d'un problème de minimisation de la consommation énergétique d'un mobile ainsi que des éléments de résolution de ce problème de contrôle optimal. La seconde concerne la planification de trajectoire pour les systèmes non-holonomes et s'inscrit dans une théorie de l'interpolation par l'entropie sous-Riemannienne développée depuis plusieurs années à travers une série d'articles. Une résolution du cas particulier du système cinématique dit de "la boule roulant sur un plan et tirant une remorque" est détaillée. Enfin, la troisième partie contribue à la problématique des observateurs non-linéaires pour les systèmes à mesures asynchrones.